Geometrie Aufgabengruppe 2

$$E: 4x_1 - 8x_2 + x_3 + 50 = 0; \quad g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ 12 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 11 \\ -4 \end{pmatrix}$$

a) Einen gemeinsamen Punkt haben die Ebene E und die Gerade g, wenn sie nicht parallel sind oder g nicht in E liegt. In beiden Fällen würde der Richtungsvektor der Geraden senkrecht auf dem Normalenvektor von E stehen. Deren Skalarprodukt müsste demnach null sein. Das ist hier nicht der Fall. Also gibt es genau einen geneinsamen Punkt.

b) Wir berechnen zunächst den Schnittwinkel zwischen dem Normalenvektor von E und dem Richtungsvektor von g:

$$\cos(\varphi^*) = \frac{\begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 5 \\ 11 \\ -4 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ 1 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 5 \\ 11 \\ -4 \end{pmatrix}\right|} = \frac{4 \cdot 5 - 8 \cdot 11 + 1 \cdot (-4)}{\sqrt{4^2 + (-8)^2 + 1^2} \cdot \sqrt{5^2 + 11^2 + (-4)^2}} = \frac{-72}{9 \cdot \sqrt{162}}$$

$$\Rightarrow \varphi^* = 128{,}94^\circ \quad \Rightarrow \varphi = 128{,}94^\circ - 90^\circ = \underline{\underline{38{,}94^\circ}}$$

Für den Schnittpunkt setzen wir die Gerade in E ein. Alternativ könnte man auch den gegebenen Punkt in g und E einsetzen.

$$4(3 + 5\lambda) - 8(12 + 11\lambda) - 2 - 4\lambda + 50 = 0 \quad \Rightarrow 12 + 20\lambda - 96 - 88\lambda - 2 - 4\lambda + 50 = 0$$
$$\Rightarrow 72\lambda = -36 \quad \Rightarrow \lambda = -0{,}5$$

$$\Rightarrow \vec{S} = \begin{pmatrix} 3 \\ 12 \\ -2 \end{pmatrix} - 0{,}5 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 11 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 6{,}5 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \underline{\underline{S(0{,}5 / 6{,}5 / 0)}} \ ☑$$

c) Zunächst bilden wir die Lotgerade l mit Aufpunkt M und Richtungsvektor $\overrightarrow{n_E}$. Diese schneiden wir mit der Ebene E und bekommen so den Lotfußpunkt F.

$$l: \vec{X} = \begin{pmatrix} -13 \\ 20 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{l \cap E = F}: \ 4(-13 + 4\mu) - 8 \cdot (20 - 8\mu) + (0 + \mu) + 50 = 0$$
$$\Rightarrow -52 + 16\mu - 160 + 64\mu + \mu + 50 = 0 \ \Rightarrow 81\mu = 162 \quad \Rightarrow \mu = 2$$

$$\Rightarrow \vec{F} = \begin{pmatrix} -13 \\ 20 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{\underline{F(-5/4/2)}}$$

$$r = \left|\overrightarrow{MF}\right| = \left|\begin{pmatrix} -5-(-13) \\ 4-20 \\ 2-0 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} 8 \\ -16 \\ 2 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{8^2 + (-16)^2 + 2^2} = \underline{\underline{18}}$$

d) Jetzt bilden wir eine Hilfsebene durch M mit dem Richtungsvektor von g als Normalenvektor. Diese schneiden wir mit g und bekommen den Berührpunkt T:

$H: 5x_1 + 11x_2 - 4x_3 + c = 0$

M eingesetzt: $5 \cdot (-13) + 11 \cdot 20 - 4 \cdot 0 + c = 0 \quad \Rightarrow c = -155$

$\Rightarrow H: 5x_1 + 11x_2 - 4x_3 - 155 = 0$

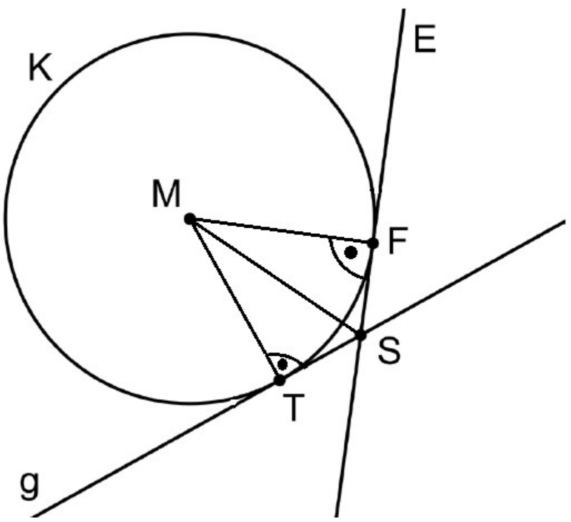
$\underline{H \cap g}$: $5 \cdot (3 + 5\lambda) + 11 \cdot (12 + 11\lambda) - 4 \cdot (-2 - 4\lambda) - 155 = 0$

$\Rightarrow 15 + 25\lambda + 132 + 121\lambda + 8 + 16\lambda - 155 = 0 \quad \Rightarrow 162\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 0$

$$\Rightarrow \vec{T} = \begin{pmatrix} 3 \\ 12 \\ -2 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 11 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 12 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{\underline{T(3/12/-2)}}$$ ☑

Hinweis: Alternativ könnte auch die Gerade in die Kugelgleichung eingesetzt werden.

e)



F und T sind Berührpunkte. Die Dreiecke SFM und SMT sind daher bei F bzw. T rechtwinklig. Daher liegen beide Punkte auf dem Thaleskreis über [MS]. Das Drachenviereck MTSF hat daher einen Umkreis.

Für den Flächeninhalt berechnen wir zunächst die Fläche des rechtwinkligen Dreiecks SFM ($\overline{MF} = r = 18$):

$$\left|\overrightarrow{SF}\right| = \left|\begin{pmatrix} -5-0{,}5 \\ 4-6{,}5 \\ 2-0 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} -5{,}5 \\ -2{,}5 \\ 2 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{5{,}5^2 + 2{,}5^2 + 2^2} = \sqrt{40{,}5}$$

$$A_{\Delta SFM} = \frac{1}{2} \cdot 18 \cdot \sqrt{40{,}5} \quad \Rightarrow A_{MTSF} = 18 \cdot \sqrt{40{,}5} \approx \underline{\underline{114{,}55}}$$

f) Der Rotationskörper setzt sich zusammen aus zwei Kegeln mit Mittelpunkt M* (Mittelpunkt von [TF]) und Radius $r = \frac{1}{2}\overline{TF}$. Die Höhen der beiden Kegel ergeben in der Summe die Länge $\overline{MS}$. $\Rightarrow \underline{\underline{a = \overline{TF}}};\ \underline{\underline{b = \overline{MS}}}$

