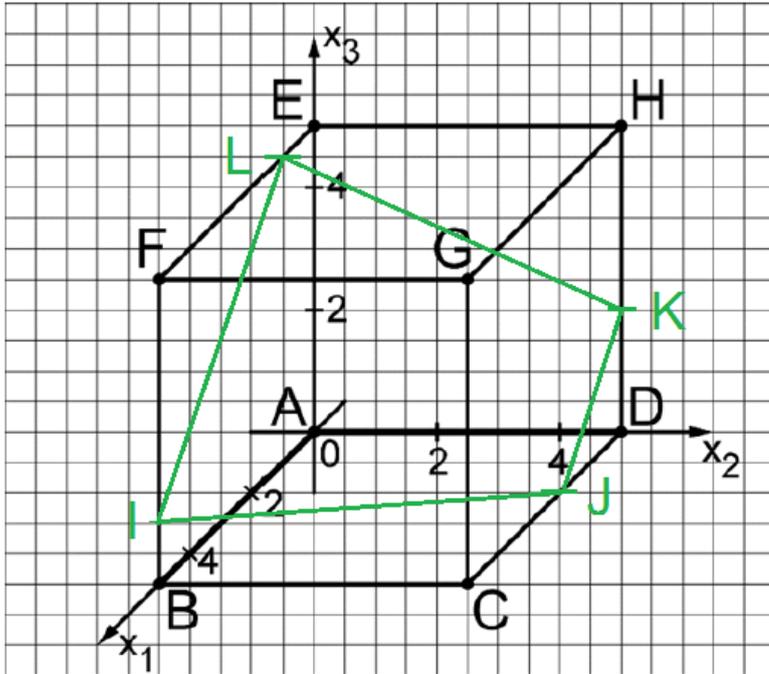


Geometrie Aufgabengruppe 2

a)



$$\text{Es gilt: } \vec{IL} = \begin{pmatrix} 1-5 \\ 0-0 \\ 5-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}; \quad \vec{JK} = \begin{pmatrix} 0-2 \\ 5-5 \\ 2-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \vec{IL}$$

Da beide Vektoren Vielfache voneinander sind, ist das Viereck IJKL ein Trapez.

$$|\vec{IJ}| = \left| \begin{pmatrix} 2-5 \\ 5-0 \\ 0-1 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{(-3)^2 + 5^2 + (-1)^2} = \sqrt{35}$$

$$|\vec{LK}| = \left| \begin{pmatrix} 0-1 \\ 5-0 \\ 2-5 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{(-1)^2 + 5^2 + (-3)^2} = \sqrt{35}$$

In dem Trapez sind zwei gegenüberliegende Seiten gleich lang.

$$\text{b) } T: \bar{X} = \bar{I} + \alpha \cdot \bar{J} + \beta \cdot \bar{L} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 16 \\ 20 \end{pmatrix} = 4 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow T: 5x_1 + 4x_2 + 5x_3 + c = 0$$

$$I \text{ eingesetzt ergibt } c: 5 \cdot 5 + 4 \cdot 0 + 5 \cdot 1 + c = 0 \Rightarrow c = -30$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{T: 5x_1 + 4x_2 + 5x_3 - 30 = 0}}$$

$$\text{c) } g_a: \bar{X} = \begin{pmatrix} 2,5 \\ 0 \\ 3,5 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -10a \\ \frac{2}{a} \end{pmatrix}$$

Für den Mittelpunkt M der Fläche CDHG gilt:

$$\Rightarrow \bar{M} = \bar{C} + \frac{1}{2} \cdot \bar{CH} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0-5 \\ 5-5 \\ 5-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,5 \\ 5 \\ 2,5 \end{pmatrix}$$

Jetzt setzen wir M in die Gerade ein:

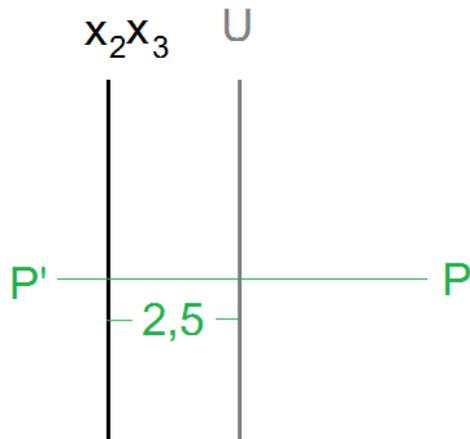
$$\begin{pmatrix} 2,5 \\ 5 \\ 2,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,5 \\ 0 \\ 3,5 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -10a \\ \frac{2}{a} \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{I } 2,5 = 2,5 \\ \text{II } 5 = -10a \cdot \lambda \\ \text{III } 2,5 = 3,5 + \frac{2\lambda}{a} \end{array}$$

$$\text{III}' \quad -1 = \frac{2\lambda}{a} \quad a = -2\lambda$$

$$\text{in II} \quad 5 = -10(-2\lambda) \cdot \lambda \Rightarrow 5 = 20\lambda^2 \Rightarrow \lambda^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow \lambda = \pm \frac{1}{2}$$

$$\text{in III}' \quad \underline{\underline{a = 1}} \text{ (a muss positiv sein, daher entfällt die negative Lösung.)}$$

d)



Die Ebene U ist parallel zur x_2x_3 – Ebene. Wird ein Punkt P an U gespiegelt, so bleiben die x_2 – und die x_3 – Koordinate daher gleich. Der Bildpunkt ergibt sich auch, wenn man P zunächst an der x_2x_3 – Ebene spiegelt und dann um 5 nach rechts verschiebt.

Für die x_1 – Koordinate gilt daher: $p_1' = -p_1 + 5 \Rightarrow \underline{\underline{P'(-p_1 + 5 / p_2 / p_3)}}$

e) Zunächst muss der Richtungsvektor der Gerade senkrecht stehen auf dem Normalenvektor der Ebene, das Skalarprodukt muss demnach null ergeben:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -10a \\ \frac{2}{a} \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow 0 - 40a + \frac{10}{a} = 0 \Rightarrow -40a^2 + 10 = 0 \Rightarrow 40a^2 = 10$$

$$\Rightarrow a^2 = 0,25 \Rightarrow \underline{\underline{a = 0,5}} \quad (\text{Die negative Lösung entfällt laut Angabe})$$

Damit die Gerade $g_{0,5}$ in der Ebene liegt und nicht parallel verläuft, muss der Aufpunkt der Gerade in der Ebene T liegen:

$$5 \cdot 2,5 + 4 \cdot 0 + 5 \cdot 3,5 - 30 = 0 \Rightarrow 30 - 30 = 0 \Rightarrow 0 = 0 \quad (\text{w.A.})$$

Der Aufpunkt liegt also in der Ebene. Daher liegt $g_{0,5}$ in der Ebene.

Die Gerade $g_{0,5}$ ist die Schnittgerade der Ebene T mit der Spiegelebene U.

Sie ist somit Fixgerade und geht bei Spiegelung von T an U in sich selbst über.

Daher liegt sie auch in der Bildebene T' und ist somit auch Schnittgerade von T und T'.

- f) Zunächst suchen wir den Punkt H auf der Gerade h durch F und G, der von der Ebene T den Abstand 2 hat. Dazu setzen wir die Gerade in die HNF der Ebene ein:

$$h: X = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$2 = \frac{|5 \cdot 5 + 4 \cdot v + 5 \cdot 5 - 30|}{\sqrt{5^2 + 4^2 + 5^2}} \Rightarrow 2 = \frac{|25 + 4v + 25 - 30|}{\sqrt{66}} \Rightarrow 2\sqrt{66} = |20 + 4v|$$

1. Fall: $2\sqrt{66} = 20 + 4v \Rightarrow 4v = 2\sqrt{66} - 20 \Rightarrow v = \frac{1}{2}\sqrt{66} - 5 \approx -0,94$

2. Fall: $-2\sqrt{66} = 20 + 4v \Rightarrow 4v = -2\sqrt{66} - 20 \Rightarrow v = -\frac{1}{2}\sqrt{66} - 5 \approx -9,06$

Damit die Spitze der Pyramide auf der **Kante** [FG] liegt, müsste gelten: $0 < v < 5$
Beide gefundenen Werte sind nicht in diesem Bereich. Daher gibt es zwar zwei Pyramiden mit Spitze auf der **Gerade** FG, deren Höhe 2 beträgt, nicht jedoch auf der **Kante** [FG].