Geometrie Aufgabengruppe 1

a) $$\left|\overrightarrow{AP}\right|+\left|\overrightarrow{PQ}\right|=\left|\begin{pmatrix}0-0\\0-0\\-1-0\end{pmatrix}\right|+\left|\begin{pmatrix}1-0\\1-0\\-3,5-(-1)\end{pmatrix}\right|=\left|\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}\right|+\left|\begin{pmatrix}1\\1\\-2,5\end{pmatrix}\right|$$
$$=\sqrt{0^2+0^2+(-1)^2}+\sqrt{1^2+1^2+(-2,5)^2}$$
$$=1+\sqrt{8,25}\approx\underline{\underline{3,872}}$$

Die Gesamtlänge des Bohrkanals beträgt etwa 3 872 m.

b) $$\cos\varphi=\frac{\overrightarrow{AP}\circ\overrightarrow{PQ}}{\left|\overrightarrow{AP}\right|\cdot\left|\overrightarrow{PQ}\right|}=\frac{\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1\\1\\-2,5\end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}\right|\cdot\left|\begin{pmatrix}1\\1\\-2,5\end{pmatrix}\right|}=\frac{0\cdot1+0\cdot1+(-1)(-2,5)}{1\cdot\sqrt{8,25}}=\frac{2,5}{\sqrt{8,25}}$$

$$\Rightarrow\underline{\underline{\varphi\approx29,5^0}}$$

c) Aufpunkt der Ebene ist Q, Normalenvektor ein Vielfaches von $\overrightarrow{PQ}$ (alle Koeffizienten sollten ganzzahlig sein).

$$\Rightarrow E: 4x_1+4x_2-10x_3+c=0$$

Q eingesetzt ergibt c: $4\cdot1+4\cdot1-10\cdot(-3,5)+c=0 \quad\Rightarrow c=-43$

$$\Rightarrow\underline{\underline{E: 4x_1+4x_2-10x_3-43=0}}$$

d) Zunächst stellen wir die Gerade g durch P und Q auf: $g:\vec{X}=\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}4\\4\\-10\end{pmatrix}$

Jetzt setzen wir die x_3 – Koordinate gleich $-3,6$: $-1-10\lambda=-3,6 \;\Rightarrow -10\lambda=-2,6$
$\Rightarrow\lambda=0,26$

$$\Rightarrow\vec{R}=\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}+0,26\cdot\begin{pmatrix}4\\4\\-10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1,04\\1,04\\-3,6\end{pmatrix}\quad\Rightarrow\underline{\underline{R(1,04/1,04/-3,6)}}$$

Die Dicke der wasserführenden Gesteinsschicht ist der Betrag des Vektors $\overrightarrow{QR}$:

$$\left|\overrightarrow{QR}\right| = \left|\begin{pmatrix} 1{,}04-1 \\ 1{,}04-1 \\ -3{,}6-(-3{,}5) \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} 0{,}04 \\ 0{,}04 \\ -0{,}1 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{0{,}04^2+0{,}04^2+(-0{,}1)^2}$$
$$= \sqrt{0{,}0132} = 0{,}11489...$$

Die Dicke der wasserführenden Gesteinsschicht beträgt ca. **115 m**.

e) Wir stellen eine Gerade h durch den Punkt B mit Richtungsvektor der x_3-Achse:

$$h: \vec{X} = \begin{pmatrix} t \\ -t \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Der Schnittpunkt von h mit der Ebene E ist der Punkt T:

$$4 \cdot t + 4 \cdot (-t) - 10 \cdot \mu - 43 = 0 \quad \Rightarrow 10\mu = -43 \quad \Rightarrow \mu = -4{,}3$$

$$\Rightarrow \vec{T} = \begin{pmatrix} t \\ -t \\ 0 \end{pmatrix} - 4{,}3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ -t \\ -4{,}3 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{\underline{T(t\,/\,-t\,/\,-4{,}3)}}$$

Die Länge des zweiten Bohrkanals ist der Betrag des Vektors $\overrightarrow{BT}$.

$$\left|\overrightarrow{BT}\right| = \left|\begin{pmatrix} t-t \\ -t-(-t) \\ -4{,}3-0 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -4{,}3 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{0^2+0^2+(-4{,}3)^2} = 4{,}3$$

Die Länge des zweiten Bohrkanals ist also unabhängig von t und damit unabhängig von der Lage der Bohrstelle immer 4,3 km.

f) Für den Abstand der beiden Eintrittspunkte gilt:

$$\left|\overrightarrow{QT}\right| = \left|\begin{pmatrix} t-1 \\ -t-1 \\ -4{,}3-(-3{,}5) \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} t-1 \\ -t-1 \\ -0{,}8 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{(t-1)^2+(-t-1)^2+(-0{,}8)^2}$$
$$= \sqrt{t^2-2t+1+t^2+2t+1+0{,}64} = \sqrt{2t^2+2{,}64}$$

Dieser Term ist minimal für $t = 0$ und beträgt in diesem Fall $\sqrt{2{,}64} = 1{,}625 > 1{,}5$.

Der Mindestabstand von 1 500 m wird für alle t und somit für alle möglichen Bohrkanäle eingehalten.