Analysis Aufgabengruppe 2

1 $f(x)=\frac{4x}{(x+1)^2}$

a) Der Bruch ist null, wenn der Zähler null ist. Das ist vorliegend nur bei $x=0$ der Fall.

Senkrechte Asymptote: $x=-1$

Da der Nenner überwiegt, gilt: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x}{(x+1)^2}="\frac{\infty^1}{\infty^2}"=0$.

Daher ist die Gerade mit der Gleichung $y=0$ (x-Achse) waagrechte Asymptote.

b) $f'(x)=\frac{(x+1)^2\cdot 4-4x\cdot 2\cdot (x+1)}{(x+1)^4}=\frac{(x^2+2x+1)\cdot 4-8x\cdot (x+1)}{(x+1)^4}$

$$=\frac{4x^2+8x+4-8x^2-8x}{(x+1)^4}=\frac{-4x^2+4}{(x+1)^4}$$

$\underline{f'(x)=0}$: $-4x^2+4=0 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x_1=1;\ x_2=-1\ (\notin D_f)$

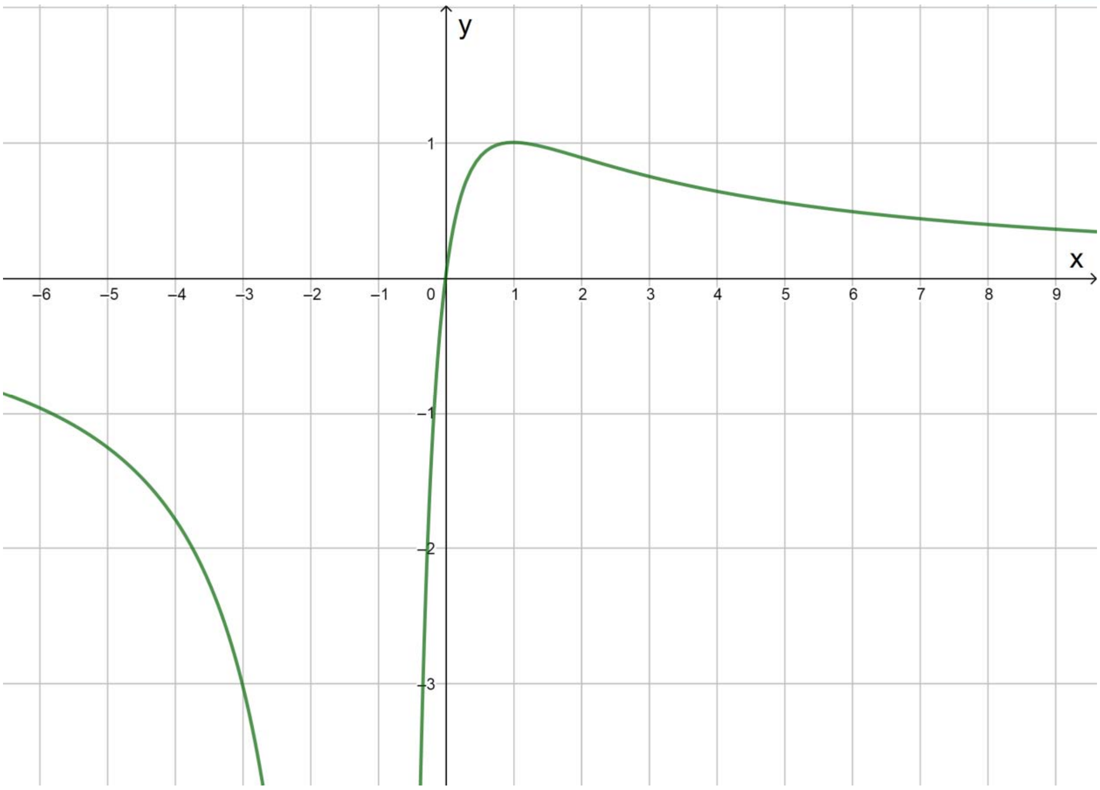
$f'(0)=\frac{-4\cdot 0^2+4}{(0+1)^4}>0 \Rightarrow G_f$ ist streng monoton steigend in $]-1;1]$.

$f'(2)=\frac{-4\cdot 2^2+4}{(2+1)^4}<0 \Rightarrow G_f$ ist streng monoton fallend in $]1;\infty[$.

$f(1)=\frac{4\cdot 1}{(1+1)^2}=1 \Rightarrow \underline{\underline{HOP(1/1)}}$

c) $f(x)=\frac{4x}{(x+1)^2}$: Für $x<0$ ist der Zähler negativ, der Nenner positiv und damit der ganze Bruch negativ. Der Graph von f verläuft daher nur im III. Quadranten.

x	–6	–5	–4	–3
f(x)	–0,96	–1,25	–1,78	–3



d) $F(x) = 4 \cdot \ln(x+1) + \dfrac{4}{x+1}$

$$F'(x) = \frac{4}{x+1} - \frac{4}{(x+1)^2} = \frac{4(x+1)-4}{(x+1)^2} = \frac{4x}{(x+1)^2} = f(x)$$

$\Rightarrow$ F ist Stammfunktion von f.

e) $f(0{,}5) = \dfrac{4 \cdot 0{,}5}{(0{,}5+1)^2} = \dfrac{2}{2{,}25} = \dfrac{8}{9}$

Nach 30 Minuten beträgt die Wirkstoffkonzentration $\frac{8}{9}$ mg / l.

Die maximale Konzentration beträgt 1 mg / l (vgl. b)

f) Die 2. Ableitung muss an der Stelle $x = 2$ eine einfache Nullstelle haben.
Nach 2 Stunden ist die Abnahme der Wirkstoffkonzentration am größten.

g) $A(b)=\int_0^b f(x)dx=\left[4\cdot\ln(x+1)+\frac{4}{x+1}\right]_0^b=\left[4\cdot\ln(b+1)+\frac{4}{b+1}\right]-\left[4\cdot\ln(0+1)+\frac{4}{0+1}\right]$

$$=\left[4\cdot\ln(b+1)+\frac{4}{b+1}\right]-\left[4\cdot\ln 1+4\right]=4\cdot\ln(b+1)+\frac{4}{b+1}-4$$

$$\lim_{b\to\infty}A(b)=\lim_{b\to\infty}4\cdot\underbrace{\ln(\underbrace{b+1}_{\to\infty})}_{\to\infty}+\underbrace{\frac{4}{\underbrace{b+1}_{\to\infty}}}_{\to 0}-4=\underline{\underline{\infty}}$$

Der mittlere Teil des Terms von A(b) geht zwar gegen null, der erste Teil aber gegen unendlich. Daher geht der ganze Term gegen unendlich. Dem Flächeninhalt kann also kein endlicher Wert zugeordnet werden. Die Funktion f stellt also für große Zeitwerte **keine** realistische Modellierung der Wirkstoffkonzentration dar.

h) $\underline{f(x)=0{,}75}:\ \frac{4x}{(x+1)^2}=0{,}75\ \Rightarrow 4x=0{,}75\cdot(x+1)^2\ \Rightarrow 16x=3\cdot(x^2+2x+1)$

$$\Rightarrow 16x=3x^2+6x+3\quad\Rightarrow 3x^2-10x+3=0$$

$$\Rightarrow x_{1/2}=\frac{10\pm\sqrt{10^2-4\cdot3\cdot3}}{2\cdot3}=\frac{10\pm\sqrt{64}}{6}=\frac{10\pm8}{6}\quad\Rightarrow x_1=3;\ x_2=\frac{1}{3}$$

Der zweite Wert ist im steigenden Teil des Graphen, hier wird also der Wert 0,75 mg/l überschritten. x_1 ist im fallenden Teil des Graphen von f. Daher muss die zweite Tablette spätestens nach 3 Stunden eingenommen werden.

i) Die Wirkstoffkonzentration durch die zweite Tablette wird durch die um 2,5 nach rechts verschobene Funktion, also $f(x-2{,}5)$ beschrieben. Da die Konzentration der ersten Tablette hinzukommt, wird die Wirkstoffkonzentration für $x\in[2{,}5;9]$ mit **Term B** beschrieben werden.

j) $k(x)=\frac{3e^{2x}}{e^{2x}+1}-1{,}5$

$$k'(x)=\frac{(e^{2x}+1)3e^{2x}\cdot2-3e^{2x}\cdot e^{2x}\cdot2}{(e^{2x}+1)^2}=\frac{6e^{2x}\left(e^{2x}+1-e^{2x}\right)}{(e^{2x}+1)^2}=\frac{6e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2}$$

Der Zähler ist wegen der e-Funktion, der Nenner wegen des Quadrats immer positiv. Daher ist der Graph von k streng monoton steigend.

k) $$\lim_{x\to\infty} k(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{3e^{2x}}{e^{2x}+1} - 1{,}5 = \lim_{x\to\infty} \frac{3e^{2x}}{e^{2x}\left(1+\frac{1}{e^{2x}}\right)} - 1{,}5 = \lim_{x\to\infty} \frac{3}{1+\underbrace{\frac{1}{\underbrace{e^{2x}}_{\to\infty}}}_{\to 0}} - 1{,}5 = 3 - 1{,}5 = \underline{\underline{1{,}5}}$$

$$k(1) = \frac{3e^2}{e^2+1} - 1{,}5 \approx 1{,}14$$

Nach einer Stunde beträgt die Wirkstoffkonzentration 1,14 mg/l. Da k streng monoton zunehmend ist, ist diese nach einer Stunde dauerhaft größer als 0,75 mg/l. Außerdem soll die Konzentration mindestens 25 % unter der Grenze von 2 mg/l, also höchstens bei 1,5 mg/l liegen. Durch den oben berechneten Grenzwert ergibt sich, dass nie 1,5 mg/l erreicht oder überschritten werden. Auch diese Bedingung ist also erfüllt.

