Geometrie Aufgabengruppe 2

1

a) Die beiden Kugeln schneiden sich, wenn für den Abstand ihrer Mittelpunkte gilt:

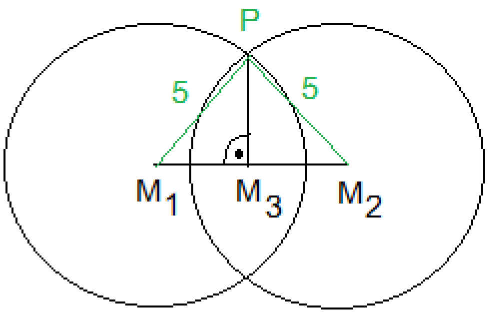
$$\left|\overrightarrow{M_1M_2}\right| < 10$$

$$\left|\overrightarrow{M_1M_2}\right| = \left|\begin{pmatrix} -3-1 \\ -2-2 \\ 1-3 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{4^2+4^2+2^2} = \sqrt{36} = 6 < 10$$

Die Kugeln k_1 und k_2 schneiden sich daher.

b) Das Dreieck M_1M_2P ist gleichschenklig (gleicher Radius der Kugeln). Die Gerade M_3P ist daher Symmetrieachse. Der Mittelpunkt des Schnittkreises M_3 ist daher auch der Mittelpunkt der Strecke $[M_1M_2]$.

$$\overrightarrow{M_3} = \overrightarrow{M_1} + \frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{M_1M_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{\underline{M_3(-1/0/2)}}$$



Der Radius r des Schnittkreises ergibt sich mit dem Satz des Pythagoras:

$$r^2 + \left(\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{M_1M_2}\right|\right)^2 = 5^2 \quad \Rightarrow r^2 + \left|\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}\right|^2 = 5^2 \quad \Rightarrow r^2 + \sqrt{2^2+2^2+1^2}^{\,2} = 5^2$$

$$\Rightarrow r^2 + 9 = 5^2 \Rightarrow r^2 = 16 \Rightarrow \underline{\underline{r = 4}}$$

2

a) $E: 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 6$

Alle drei Koordinaten sollen übereinstimmen, also gilt:

$3x_1 + 2x_1 + 2x_1 = 6 \quad \Rightarrow 7x_1 = 6 \Rightarrow x_1 = \frac{6}{7} \quad \Rightarrow \underline{\underline{P\left(\frac{6}{7};\frac{6}{7};\frac{6}{7}\right)}}$

b) Alle Punkte mit drei gleichen Koordinaten liegen auf der Gerade $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Es gibt unendlich viele Ebenen, die zu dieser Geraden parallel verlaufen und daher unendlich viele Ebenen, die keinen Punkt enthalten, dessen drei Koordinaten übereinstimmen.

