Geometrie Aufgabengruppe 2

a) Wir berechnen zunächst den Mittelpunkt M_1 der Seite [AB] und den Mittelpunkt M_2 der Seite [EF]:

$$\overrightarrow{M_1} = \vec{A} + \frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}3\\0\\2\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}0-3\\3-0\\2-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1,5\\1,5\\2\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{M_2} = \vec{E} + \frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{EF} = \begin{pmatrix}6\\0\\0\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}0-6\\6-0\\0-0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\3\\0\end{pmatrix}$$

$$\left|\overrightarrow{M_1M_2}\right| = \left|\begin{pmatrix}3-1,5\\3-1,5\\0-2\end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix}1,5\\1,5\\-2\end{pmatrix}\right| = \sqrt{1,5^2+1,5^2+(-2)^2} = \sqrt{8,5}$$

Die Länge des Seils beträgt $\underline{\underline{1,2\cdot\sqrt{8,5}\approx 3,5\,\mathrm{m}}}$.

b) $$L: \vec{X} = \vec{A} + \alpha\cdot\overrightarrow{AB} + \beta\cdot\overrightarrow{AE} = \begin{pmatrix}3\\0\\2\end{pmatrix} + \alpha\cdot\begin{pmatrix}0-3\\3-0\\2-2\end{pmatrix} + \beta\cdot\begin{pmatrix}6-3\\0-0\\0-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\0\\2\end{pmatrix} + \alpha\cdot\begin{pmatrix}-3\\3\\0\end{pmatrix} + \beta\cdot\begin{pmatrix}3\\0\\-2\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AE} = \begin{pmatrix}-3\\3\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}3\\0\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-6\\-6\\-9\end{pmatrix} = (-3)\cdot\begin{pmatrix}2\\2\\3\end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{n_L} = \begin{pmatrix}2\\2\\3\end{pmatrix} \quad \Rightarrow L: 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + c = 0$$

Einsetzen des Aufpunkts A ergibt: $2\cdot 3 + 2\cdot 0 + 3\cdot 2 + c = 0 \;\Rightarrow c = -12$

$\Rightarrow \underline{\underline{L: 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 12 = 0}}$

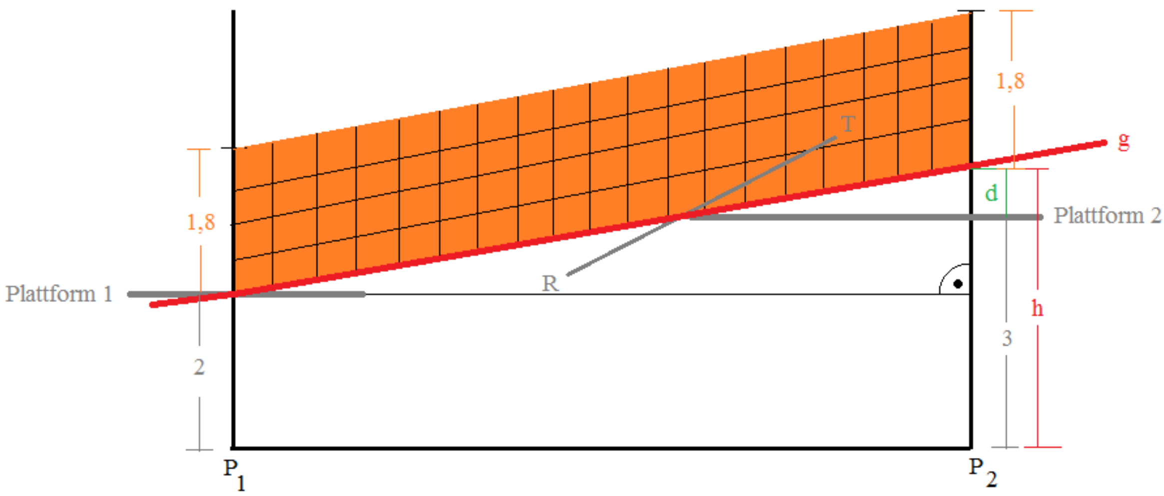
c) $$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}-3\\3\\0\end{pmatrix};\quad \overrightarrow{EF} = \begin{pmatrix}-6\\6\\0\end{pmatrix} = 2\cdot\overrightarrow{AB} \Rightarrow$$ Die Kletterwand hat die Form eines Trapezes.

d) Gesucht ist der Winkel zwischen der Ebene L und der x_1x_2-Ebene, also der Winkel zwischen den beiden Normalenvektoren.

$$\cos\alpha = \frac{\begin{pmatrix}2\\2\\3\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix}2\\2\\3\end{pmatrix}\right|\cdot\left|\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right|} = \frac{0+0+3}{\sqrt{2^2+2^2+3^2}\cdot\sqrt{0^2+0^2+1^2}} = \frac{3}{\sqrt{17}}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\alpha \approx 43{,}3^\circ}}$$

e)



Das Netz hat die Form eines Parallelogramms, da die beiden Pfähle parallel verlaufen und die gegenüberliegenden Seiten gleich lang sind (1,8 m). Die Höhe des Parallelogramms ist die Länge der Strecke $[P_1P_2]$.

$$\left|\overline{P_1P_2}\right| = \left|\begin{pmatrix}5-0\\10-0\\0-0\end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix}5\\10\\0\end{pmatrix}\right| = \sqrt{25+100+0} = \sqrt{125} \quad \Rightarrow \underline{\underline{A_{Netz} = 1{,}8\cdot\sqrt{125} \approx 20{,}1\,\text{m}^2}}$$

f) Die Schwierigkeit dieser Aufgabe bestand darin, den Parameter h aus der Geradengleichung zu berechnen. Dies kann dadurch erreicht werden, dass man die Gerade g (untere Netzkante) mit der Geraden RT (Kante der Plattform 2) gleichsetzt, da letztere ja berührt werden soll. Das h, das sich dann gleichsam nebenbei ergibt, ist die Höhe der Ecke der Netzunterkante über dem Boden. Wenn man davon die Höhe der Plattform 2 (3 Meter) abzieht, erhält man den Abstand d der Netzunterkante von der Plattform 2.

Gerade h durch R und T: $h:\overrightarrow{X}=\begin{pmatrix}5\\7\\3\end{pmatrix}+\mu\cdot\begin{pmatrix}2-5\\10-7\\3-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\7\\3\end{pmatrix}+\mu\cdot\begin{pmatrix}-3\\3\\0\end{pmatrix}$

$$\underline{g\cap h}:\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}5\\10\\h-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\7\\3\end{pmatrix}+\mu\cdot\begin{pmatrix}-3\\3\\0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{array}{lll}\text{I} & 0+5\lambda=5-3\mu & \Rightarrow\lambda=1-0,6\mu\,(\text{I}')\\ \text{II} & 0+10\lambda=7+3\mu & \\ \text{III} & 2+\lambda(h-2)=3+0\mu & \end{array}$$

I' in II: $10(1-0,6\mu)=7+3\mu\;\Rightarrow 10-6\mu=7+3\mu\;\Rightarrow 3=9\mu\;\Rightarrow\mu=\frac{1}{3}$ (II')

II' in I': $\lambda=1-0,6\cdot\frac{1}{3}\;\Rightarrow\lambda=0,8$

λ,μ in III: $2+0,8\cdot(h-2)=3\;\Rightarrow 2+0,8h-1,6=3\;\Rightarrow 0,8h=2,6\;\Rightarrow h=3,25$

Der Abstand des betrachteten Eckpunkts von Plattform 2 beträgt somit $3,25-3=\underline{\underline{0,25\,\text{m}}}$.

