Geometrie Aufgabengruppe 1

a) $$AB: \vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2-0 \\ 6-0 \\ 1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die x_3-Koordinate des Richtungsvektors ist null, die des Aufpunktes A ungleich null. Daher verläuft die Gerade AB parallel zur x_1x_2-Ebene.

b) Das Viereck ABCD ist ein Rechteck, wenn zwei gegenüberliegende Seiten zum gleichen Vektor führen und mindestens ein Winkel 90° beträgt, wenn also das entsprechende Skalarprodukt null ergibt.

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix};\ \overrightarrow{DC} = \begin{pmatrix} -4-(-6) \\ 8-2 \\ 5-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} = \overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -6-0 \\ 2-0 \\ 5-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = -12+12 = 0$$

Das Parallelogramm ABCD ist also bei A rechtwinklig und daher ein Rechteck.

$$\vec{M} = \vec{A} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -4-0 \\ 8-0 \\ 5-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{\underline{M(-2/4/3)}}$$

c) $$E: \vec{X} = \vec{A} + \alpha \cdot \overrightarrow{AB} + \alpha \cdot \overrightarrow{AD}$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ -8 \\ 40 \end{pmatrix} = 8 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$E: \overrightarrow{n_E} \circ \left[\vec{X} - \vec{A}\right] = 0 \Rightarrow E: \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \circ \left[\vec{X} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right] = 0 \Rightarrow \underline{\underline{E: 3x_1 - x_2 + 5x_3 - 5 = 0}}$$

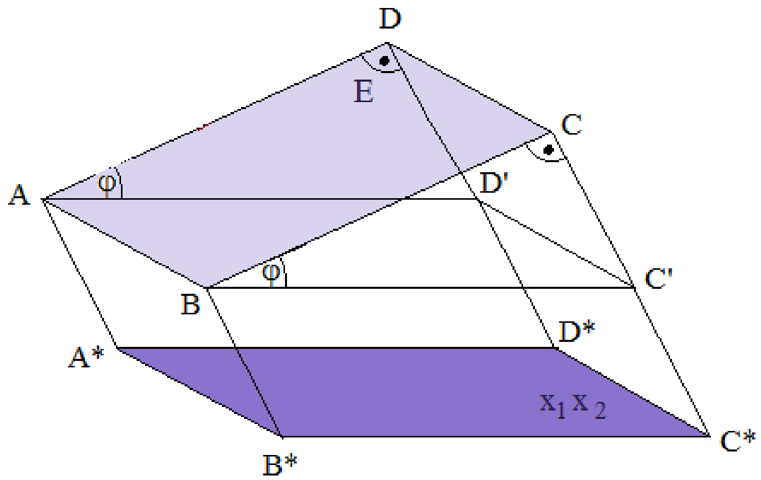
d) Gesucht ist der Winkel φ zwischen der Ebene E und der x_1x_2-Ebene, also zwischen deren Normalenvektoren:

$$\cos\varphi = \frac{\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right|} = \frac{5}{\sqrt{9+1+25} \cdot \sqrt{1}} = \frac{5}{\sqrt{35}} \Rightarrow \varphi = 32{,}31^\circ$$

Da $30^\circ \le 32{,}31^\circ \le 36^\circ$, ist die Bedingung erfüllt.

 © Marcus ter Haerst

e)



AB ist parallel zur x_1x_2-Ebene (siehe a). $\Rightarrow \overrightarrow{A^*B^*} = \overrightarrow{AB}$

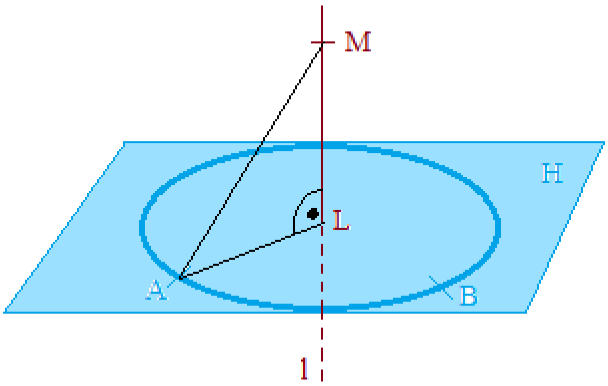
Im rechtwinkligen Dreieck $AD'D$ gilt $\cos\varphi = \dfrac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}$:

$$\cos\varphi = \frac{\left|\overrightarrow{AD}\right|}{\left|\overrightarrow{AD'}\right|} = \frac{\left|\overrightarrow{AD}\right|}{\left|\overrightarrow{A^*D^*}\right|} \Rightarrow \left|\overrightarrow{A^*D^*}\right| = \frac{\left|\overrightarrow{AD}\right|}{\cos\varphi}$$

Für die Fläche des Schattens gilt dann:

$$A_{A^*B^*C^*D^*} = \left|\overrightarrow{A^*B^*}\right| \cdot \left|\overrightarrow{A^*D^*}\right| \cdot (0{,}8\,\text{m})^2 = \underline{\underline{\left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \frac{\left|\overrightarrow{AD}\right|}{\cos\varphi} \cdot (0{,}8\,\text{m})^2}}$$

f)



Der Radius des Kreises ist der Abstand des Punktes A von der Gerade l durch den Punkt M und den Lotfußpunkt L. Der Richtungsvektor von l ist der der x_3-Achse.
Die Hilfsebene H enthält den Kreis und ist parallel zur x_1x_2-Ebene.

Das Problem kann standardmäßig als Abstand Punkt A von der Geraden l gelöst werden (Möglichkeit 2) oder man überlegt sich die Koordinaten von L und bestimmt dann den Abstand des Punktes L vom Punkt A (Möglichkeit 1).

© Marcus ter Haerst

Möglichkeit 1

L hat die gleiche x_1- und die gleiche x_2-Koordinate wie M (vgl. b) und die gleiche x_3-Koordinate wie A (siehe Skizze). $\Rightarrow L(-2/4/1)$

$$r = \left|\overrightarrow{LA}\right| = \left|\begin{pmatrix}-2-0\\4-0\\1-1\end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix}-2\\4\\0\end{pmatrix}\right| = \sqrt{4+16} = \sqrt{20}$$

In Originalgröße beträgt der Radius $\sqrt{20}\cdot 0{,}8\,\text{m} \approx \underline{\underline{3{,}58\,\text{m}}}$.

Möglichkeit 2

$$l: \vec{X} = \begin{pmatrix}-2\\4\\3\end{pmatrix} + \lambda\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix};\ H: x_3 = 1$$

$$l \cap H: 3+\lambda = 1 \ \Rightarrow \lambda = -2$$

$$\Rightarrow \vec{L} = \begin{pmatrix}-2\\4\\3\end{pmatrix} - 2\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\4\\1\end{pmatrix}$$ … dann weiter wie oben.

© Marcus ter Haerst