## Analysis Aufgabengruppe 2

1 $f(x)=2e^{-x}\cdot(2e^{-x}-1);\ D_f=\mathbb{R}$

a) Wir leiten mit der Produkt- und der Kettenregel ab (oder: erst ausmultiplizieren):

$$f'(x)=2e^{-x}\cdot(-1)(2e^{-x}-1)+2e^{-x}\cdot 2e^{-x}\cdot(-1)$$
$$=-2e^{-x}\cdot(2e^{-x}-1+2e^{-x})\ =-2e^{-x}\cdot(4e^{-x}-1)=\underline{\underline{2e^{-x}\cdot(1-4e^{-x})}}$$

b) $\underline{f'(x)=0}$: $\underbrace{2e^{-x}}_{\neq 0}\cdot(1-4e^{-x})=0\ \Rightarrow 1-4e^{-x}=0\ \Rightarrow 4e^{-x}=1\ \Rightarrow e^{-x}=\frac{1}{4}$

$$\Rightarrow -x=\ln\frac{1}{4}\ \Rightarrow x'=-\ln\frac{1}{4}=-\ln 4^{-1}=\underline{\underline{\ln 4}}\ (\approx 1{,}386)$$

Die Art des Extremums bestimmen wir mit dem Monotonieverhalten:

$$f'(0)=2e^{0}\cdot(1-4e^{0})=2(1-4)=-6<0$$
$$f'(2)=\underbrace{2e^{-2}}_{>0}\cdot(\underbrace{1-4e^{-2}}_{>0})>0$$

In $]-\infty;\ln 4[$ gilt daher: $f'(x)<0$
In $]\ln 4;\infty[$ gilt: $f'(x)>0$. Es liegt somit bei $x'=\ln 4$ ein TIP vor.

$$f(x)=2e^{-\ln 4}\cdot(2e^{-\ln 4}-1)\ =2\cdot\frac{1}{4}\cdot(2\cdot\frac{1}{4}-1)=\frac{1}{2}\cdot(\frac{1}{2}-1)=-\frac{1}{4}\quad\Rightarrow \underline{\underline{\text{TIP}\left(\ln 4/-\frac{1}{4}\right)}}$$

c) $F(x)=2e^{-x}-2e^{-2x}$

$$F'(x)=2e^{-x}\cdot(-1)-2e^{-2x}\cdot(-2)\ =-2e^{-x}+4e^{-2x}\ =2e^{-x}(2e^{-x}-1)=f(x)$$

$\Rightarrow$ F ist Stammfunktion von f.

$$\lim_{x\to\infty}F(x)=\lim_{x\to\infty}\underbrace{2e^{-x}}_{\to 0}-\underbrace{2e^{-2x}}_{\to 0}=\underline{\underline{0}}$$

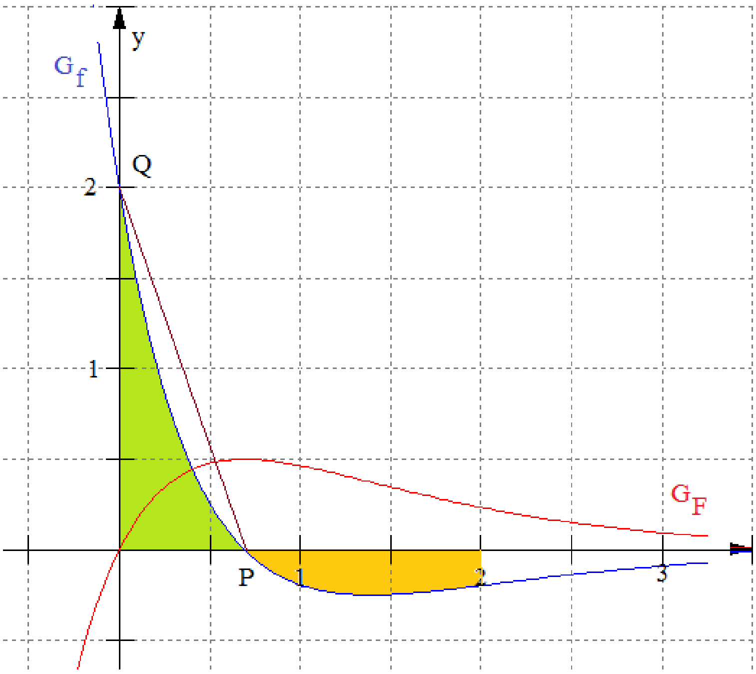
d) Da $F'(x)=f(x)>0$ für $x<\ln 2$ und $F'(x)=f(x)<0$ für $x>\ln 2$ (siehe Graph von f), ist $G_F$ links von $x=\ln 2$ streng monoton steigend und rechts davon streng monoton fallend. Da es sich um die einzige Nullstelle von f handelt, gibt es kein weiteres Extremum von F. (ln2/0,5) ist somit ein **absolutes Maximum**, F nimmt keine größeren Werte als 0,5 an.

$F''(\ln 4)=f'(\ln 4)=0$. $G_f$ hat an dieser Stelle einen TIP (siehe b). Daher hat $G_F$ dort das **stärkste Gefälle** und somit einen WEP.

$$F(\ln 4)=2e^{-\ln 4}-2e^{-2\ln 4}\ =2\cdot\frac{1}{4}-2\cdot\frac{1}{16}=\frac{1}{2}-\frac{1}{8}=\underline{\underline{\frac{3}{8}}}$$

e)




f) $A_{\Delta OPQ} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \ln 2 = \ln 2$

$$\int_0^{\ln 2} f(x)dx = \left[2e^{-x} - 2e^{-2x}\right]_0^{\ln 2} = 2e^{-\ln 2} - 2e^{-2\ln 2} = 2 \cdot \frac{1}{2} - 2 \cdot \frac{1}{4} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Abweichung: $\frac{\ln 2 - \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} \approx 0{,}3863 = \underline{\underline{38{,}63\,\%}}$

g) $F_0(x) = \int_0^x f(t)dt = \left[2e^{-t} - 2e^{-2t}\right]_0^x = 2e^{-x} - 2e^{-2x} - (2e^0 - 2e^0) = 2e^{-x} - 2e^{-2x} = F(x)$

$F_0(2) \approx 0{,}234 \Rightarrow$ Das Flächenstück zwischen $G_f$ und der x-Achse oberhalb der x-Achse ist um 0,234 größer als das Flächenstück unterhalb der x-Achse für $\ln 2 \le x \le 2$.

h) Notwendig ist eine Verschiebung um mehr als 0,5 nach unten.
z.B. $H(x) = 2e^{-x} - 2e^{-2x} - 1$

2

a) $B(2) = e^{-4} \approx 0{,}01831 = \underline{\underline{1{,}8\,\%}}$

$F(2) = 0{,}234 = \underline{\underline{23{,}4\,\%}}$ (vgl. 1g)

$P(2) = 1 - 0{,}01831 - 0{,}234 = 0{,}74769 \approx \underline{\underline{74{,}8\,\%}}$

b) Gesucht ist das Maximum von F. Dieses ist bei $x' = \ln 2$ (vgl. 1d).

Das sind $6 \cdot \ln 2 \cdot 60\,\text{sek} \approx 250\,\text{sek} \approx \underline{\underline{4\,\text{min}\,10\,\text{sek}}}$.

c) Es soll gelten: $B(x) = F(x) = P(x) = \frac{1}{3}$

**Möglichkeit 1**: Wir zeigen, dass $B(x) = F(x)$ zu einem anderen Ergebnis als $\frac{1}{3}$ führt.

$$\underline{B(x) = F(x)}:\ e^{-2x} = 2e^{-x} - 2e^{-2x} \ \Rightarrow 3e^{-2x} - 2e^{-x} = 0 \ \Rightarrow \underbrace{e^{-x}}_{\neq 0}(3e^{-x} - 2) = 0$$

$$\Rightarrow 3e^{-x} - 2 = 0 \ \Rightarrow 3e^{-x} = 2 \ \Rightarrow e^{-x} = \frac{2}{3} \ \Rightarrow -x = \ln\frac{2}{3} \ \Rightarrow x = -\ln\frac{2}{3}$$

$$B\left(-\ln\frac{2}{3}\right) = e^{-2\cdot\left(-\ln\frac{2}{3}\right)} = e^{2\cdot\ln\frac{2}{3}} = e^{\ln\left(\frac{2}{3}\right)^2} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9} \neq \frac{1}{3}$$

Schon B und F haben nicht gleichzeitig einen Anteil von $\frac{1}{3}$.

**Möglichkeit 2**: Wir setzen $B(x) = \frac{1}{3}$ und prüfen, ob für das Ergebnis $x_0$ gilt: $F(x_0) = \frac{1}{3}$.

$$\underline{B(x) = \frac{1}{3}}:\ e^{-2x} = \frac{1}{3} \Rightarrow -2x = \ln\frac{1}{3} \ \Rightarrow x_0 = -\frac{1}{2}\ln\frac{1}{3} = \frac{1}{2}\ln 3$$

$$F\left(\frac{1}{2}\ln 3\right) = 2e^{-\frac{1}{2}\ln 3} - 2e^{-2\cdot\frac{1}{2}\ln 3} = 2e^{\ln 3^{-\frac{1}{2}}} - 2e^{\ln 3^{-1}} = 2\cdot 3^{-\frac{1}{2}} - 2\cdot 3^{-1} = \frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{2}{3} \neq \frac{1}{3}$$

d) $\lim\limits_{x\to\infty} P(x) = \lim\limits_{x\to\infty} 1 - B(x) - F(x) \ \ \lim\limits_{x\to\infty} 1 - \underbrace{e^{-2x}}_{\to 0} - \underbrace{2e^{-x}}_{\to 0} + \underbrace{2e^{-2x}}_{\to 0} = \underline{\underline{1}}$

Auf lange Sicht ist nur noch der Stoff Pb207 in dem Gefäß-