Fachabiturprüfung 2024

zum Erwerb der Fachhochschulreife

an Fachoberschulen und Berufsoberschulen

Montag, 13. Mai 2024, 10:30 Uhr – 12:30 Uhr

Mathematik

Nichttechnische Ausbildungsrichtungen

Teil 2: mit Hilfsmitteln

Bei der Bearbeitung der Aufgaben dürfen Hilfsmittel verwendet werden.

- Die Schülerinnen und Schüler haben je eine Aufgabe aus den Aufgabengruppen Analysis und Stochastik zu bearbeiten. Die Auswahl trifft die Schule.

- Das Geheft mit den Aufgabenstellungen ist am Ende der Bearbeitungszeit abzugeben.

Name des Prüflings	Klasse

BE

1.0 Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto -\frac{1}{2}x^4 - 2x^3 - 2x^2$ mit der Definitionsmenge $D_f = \mathbb{R}$. Der Graph der Funktion f in einem kartesischen Koordinatensystem wird mit G_f bezeichnet.

3 1.1 Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion f.

7 1.2 Ermitteln Sie jeweils die Art und die Koordinaten aller Punkte, in denen G_f eine waagrechte Tangente besitzt.

4 1.3 Zeichnen Sie unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse und weiterer geeigneter Funktionswerte den Graphen G_f für $-3 \le x \le 1$ in ein kartesisches Koordinatensystem.
Maßstab für beide Achsen: 1 LE = 1 cm

1.4.0 Der Graph G_p einer quadratischen Funktion p mit der Definitionsmenge $D_p = \mathbb{R}$ besitzt in einem kartesischen Koordinatensystem den Scheitelpunkt $S(-1 / -1{,}5)$ und schneidet den Graphen G_f in den Punkten $A(-3 / -4{,}5)$ und $B(1 / -4{,}5)$.

6 1.4.1 Bestimmen Sie einen Funktionsterm von p und zeichnen Sie die zugehörige Parabel für $-3 \le x \le 1$ in das vorhandene Koordinatensystem ein.

[Mögliches Teilergebnis: $p(x) = -\frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{2}x - \frac{9}{4}$]

4 1.4.2 Die beiden Graphen G_f und G_p schließen ein endliches Flächenstück ein.
Berechnen Sie die exakte Maßzahl des Flächeninhalts des beschriebenen Flächenstücks.

Fortsetzung siehe nächste Seite

BE

2.0 In sogenannten Aluminiumhütten wird nach einem bestimmten Verfahren Aluminium aus Aluminiumoxid gewonnen. Die Temperatur vom Ausgangsstoff bis zum fertigen Endprodukt Aluminium während des Herstellungsprozesses kann modellhaft durch die Funktion T mit der Funktionsgleichung $T(t) = 250 \cdot t \cdot e^{-0,1 \cdot t} + 22$ mit $t \in \mathbb{R}_0^+$ beschrieben werden. Dabei steht die Variable t für die Zeit in Minuten ab dem Zeitpunkt $t_0 = 0$. Der Funktionswert von T gibt die Temperatur in Grad Celsius zum Zeitpunkt t an. Auf das Mitführen von Einheiten während der Rechnungen wird verzichtet. Runden Sie Ihre Ergebnisse sinnvoll.

4 2.1 Berechnen Sie die Temperatur im Herstellungsprozess nach fünf Minuten und die Temperatur, welche sich nach diesem Modell theoretisch langfristig einstellt.

7 2.2 Beim Erreichen des Temperaturmaximums liegt Aluminium in flüssiger Form vor. Es wird mittels eines Saugrohres abgesaugt und kühlt anschließend ab. Ermitteln Sie rechnerisch dieses Temperaturmaximum.

[Mögliches Teilergebnis: $\dot{T}(t) = 250 \cdot e^{-0,1 \cdot t} - 25 \cdot t \cdot e^{-0,1 \cdot t}$]

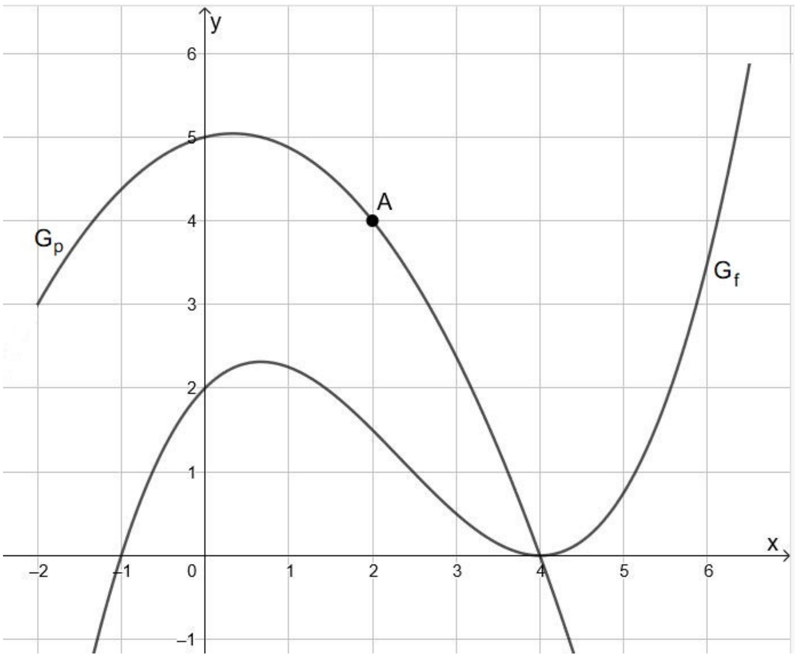
5 2.3 Zeichnen Sie unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse und weiterer geeigneter Funktionswerte den Graphen der Funktion T im Bereich $0 \le t \le 60$ in ein Koordinatensystem. Wählen Sie dazu für beide Achsen einen geeigneten Maßstab. Entnehmen Sie anschließend dem Graphen den Zeitpunkt $t_{20-fach}$, zu dem die Temperatur im Abkühlvorgang dem 20-fachen der Anfangstemperatur entspricht.

3 2.4 Für die Koordinaten des Wendepunktes des Graphen der Funktion T gilt ohne Nachweis $W(20 / T(20))$. Berechnen Sie $\dot{T}(20)$ und interpretieren Sie den Wert im Sinne der vorliegenden Thematik.

43

BE

1.0 Die Abbildung zeigt ausschnittsweise den Graphen G_f einer ganzrationalen Funktion f dritten Grades mit der Definitionsmenge $D_f = \mathbb{R}$ und den Graphen G_p der quadratischen Funktion $p: x \mapsto -\frac{3}{8}x^2 + \frac{1}{4}x + 5$ mit der Definitionsmenge $D_p = \mathbb{R}$.



3 **1.1** Entnehmen Sie der Abbildung aus 1.0 geeignete Werte und bestimmen Sie einen Funktionsterm f(x) der Funktion f.

1.2.0 Die Funktion f lässt sich auch in der Form $f(x) = \frac{1}{8}(x^3 - 7x^2 + 8x + 16)$ darstellen. Der Nachweis hierfür ist nicht erforderlich.

3 **1.2.1** Bestimmen Sie eine Gleichung der Tangente G_g an G_f im Punkt P(0/2).

3 **1.2.2** Zeigen Sie, dass in keinem Punkt des Graphen G_f eine Tangente mit der Steigung $m = -2$ angelegt werden kann.

4 **1.2.3** Ermitteln Sie die exakten Koordinaten des Wendepunkts von G_f.

6 **1.2.4** G_p (siehe Abbildung oben) und die Gerade G_h mit der Funktionsgleichung $h(x) = x + 2$ und der Definitionsmenge $D_h = \mathbb{R}$ schneiden sich im Punkt A(2/4). Zeichnen Sie die Gerade G_h in die obige Abbildung ein und schraffieren Sie das Flächenstück, das durch G_p, G_h und die y-Achse im I. Quadranten des Koordinatensystems eingeschlossen wird. Berechnen Sie die Maßzahl seines Flächeninhalts.

Fortsetzung siehe nächste Seite

BE

2.0 Beim Backen eines Roggenbrotes kann Sauerteig als Triebmittel für den Brotteig verwendet werden. Für den Sauerteig setzt man Mehl und Wasser im selben Verhältnis zueinander an. Milchsäurebakterien in Mehl und Wasser sorgen dafür, dass im Gemisch die notwendige Milchsäure entsteht.
Ein frisch angesetzter Sauerteig besitzt zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ einen pH-Wert (Säuregrad) von 6,0. Nach 40 Stunden hat der Sauerteig einen pH-Wert von 3,5. Das Durchsäuern des Gemischs lässt sich näherungsweise durch die Funktion p mit der Funktionsgleichung $p(t) = 3{,}2 + b \cdot e^{-k \cdot t}$ mit $t \in \mathbb{R}_0^+$ und $b, k \in \mathbb{R}$ beschreiben.
Dabei steht die Variable t für die Zeit in Stunden ab dem Zeitpunkt $t_0 = 0$. Der Funktionswert von p gibt den pH-Wert zum Zeitpunkt t an.

Auf das Mitführen von Einheiten während der Rechnungen wird verzichtet. Runden Sie Ihre Ergebnisse sinnvoll.

4 2.1 Bestimmen Sie die Werte der Parameter b und k.

2.2.0 Im Folgenden gilt $p(t) = 3{,}2 + 2{,}8 \cdot e^{-0{,}056 \cdot t}$.

6 2.2.1 Der Sauerteig kann ab einem pH-Wert von 4,0 dem Brotteig zugegeben werden. Bestimmen Sie rechnerisch den Zeitpunkt, ab welchem die Zugabe des Sauerteigs möglich ist. Berechnen Sie die Abnahmegeschwindigkeit des pH-Werts zu diesem Zeitpunkt.

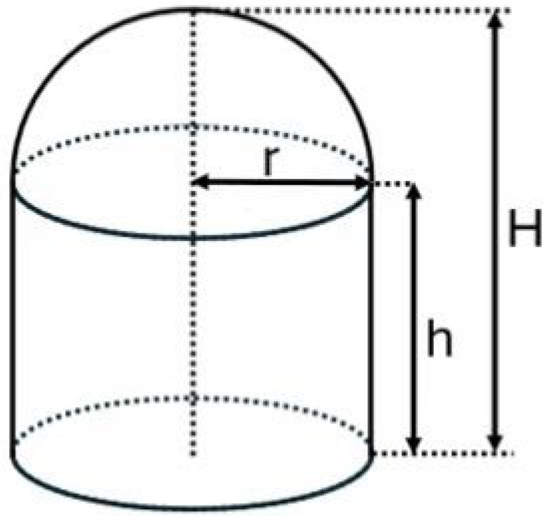
[Mögliches Teilergebnis: $\dot{p}(t) = -0{,}1568 \cdot e^{-0{,}056 \cdot t}$]

4 2.2.2 Zeichnen Sie unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse und weiterer geeigneter Funktionswerte den Graphen der Funktion p im Bereich $0 \le t \le 60$ in ein Koordinatensystem. Wählen Sie dazu für beide Achsen einen geeigneten Maßstab.

Fortsetzung siehe nächste Seite

BE

3.0 Ein Hersteller von Tauchflaschen plant ein neues Tauchflaschenmodell. Die Wandstärke des Materials wird vernachlässigt. Die Tauchflasche hat vereinfacht die Form eines geraden Zylinders mit aufgesetzter Halbkugel (siehe Abbildung). Die Firma gibt für die Zylinderhöhe h (in dm) die Bedingung $h(r) = \frac{4}{r} - \frac{3r}{2}$ vor. Bei den Berechnungen wird auf das Mitführen von Einheiten verzichtet.
Runden Sie Ihre Ergebnisse auf zwei Nachkommastellen.



3 **3.1** Zeigen Sie, dass die Maßzahl des Volumens (in dm^3) der Tauchflasche in Abhängigkeit vom Zylinderradius r (in dm) durch die Funktion V mit der Funktionsgleichung $V(r) = -\frac{5}{6}r^3\pi + 4r\pi$ beschrieben werden kann.

7 **3.2** Der Hersteller gibt für das neue Modell einen Radius von 0,85 dm bis 1,4 dm vor. Ermitteln Sie den Radius r, für den das Volumen der Tauchflasche maximal wird und berechnen Sie die Maßzahl dieses maximalen Volumens.

43

BE

Im Folgenden werden relative Häufigkeiten als Wahrscheinlichkeiten interpretiert.

1.0 Im Juni und Juli 2024 findet die Fußball-Europameisterschaft in Deutschland statt. Ein Tourismusunternehmen bietet für fußballbegeisterte Kunden diverse Möglichkeiten, an der Veranstaltung in Deutschland teilzunehmen. Im Nachfolgenden werden nur Kunden betrachtet, welche sich für die Fußball-Europameisterschaft interessieren. Fußballbegeisterte Kunden können bei dem Tourismusunternehmen Anreise (A), Unterkunft (U) und Eintritt zu einem Spiel (S) buchen. 50 % aller Fans buchen die Anreise. Von diesen buchen 80 % gleichzeitig eine Unterkunft. Von den Fans, die eigenständig anreisen, buchen 60 % eine Unterkunft. Unabhängig davon, ob die Anreise bzw. die Unterkunft beim Tourismusunternehmen gebucht oder nicht gebucht wurde, bucht ein fester Anteil aller Fans den Eintritt für den Besuch eines Spieles. Von allen Fans entscheiden sich 36 % für das Komplettangebot aus Anreise mit Unterkunft und Eintritt.

Das Buchungsverhalten eines beliebig herausgegriffenen fußballbegeisterten Kunden des Tourismusunternehmens wird als Zufallsexperiment aufgefasst.

1.1 Bestimmen Sie unter Verwendung eines Baumdiagramms die Wahrscheinlichkeiten aller acht Elementarereignisse des betrachteten Zufallsexperiments.

[Teilergebnis: $P\left(\left\{\left(A;\overline{U};\overline{S}\right)\right\}\right) = 0{,}01$]

1.2 Gegeben sind folgende Ereignisse:

E_1 : „Ein zufällig ausgewählter Kunde bucht die Anreise oder den Eintritt zu einem Spiel.“

$E_2 = \left\{(A;U;S);\left(A;\overline{U};\overline{S}\right);\left(\overline{A};\overline{U};S\right)\right\}$

$E_3 = \overline{\overline{E_1} \cup E_2}$

Ermitteln Sie eine aufzählende Mengenschreibweise für E_3.

2 Ein Hotel, welches zur Europameisterschaft ausschließlich mit Fans belegt ist, bietet neben den gewöhnlichen Services zwei zusätzliche Dienste an, welche die Gäste wählen können. Diese sind ein Fahrdienst zum Spiel im örtlichen Stadion (F) sowie ein Besuch des Trainingsgeländes der ansässigen Nationalmannschaft (N). Von früheren Großereignissen ist bekannt, dass drei von fünf Gästen den Fahrdienst wählen. Insgesamt entscheiden sich 50 % aller Gäste für genau einen der beiden zusätzlichen Dienste. Außerdem gilt: $P_F(N) = 0{,}25$.

Bestimmen Sie mithilfe einer Vierfeldertafel, wie viele der insgesamt 400 Gäste des Hotels keinen der beiden zusätzlichen Dienste wünschen.

Fortsetzung siehe nächste Seite

BE

3 Bei der Zusammenstellung der sechs Gruppen für die Gruppenphase wurden zunächst die vermeintlich sechs stärksten Mannschaften zufällig per Los auf die sechs Gruppen verteilt. Diese sechs Mannschaften werden als „Gruppenköpfe“ bezeichnet. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Gruppenkopf unter den 16 Mannschaften, die ins Achtelfinale einziehen, vertreten ist, beträgt $p = 0{,}8$.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit des folgenden Ereignisses:

E_4 : „Nicht alle Gruppenköpfe erreichen das Achtelfinale.“

4.0 Ein Fanshop vor einem Stadion bietet den Fans genau die folgenden Artikel zum Kauf:

Artikel	Trikot	Hose	Fahne
Preis in €	100	50	10

Im Folgenden werden nur Fans betrachtet, die mindestens einen der obigen drei Artikel kaufen, wobei kein Fan denselben Artikel mehrfach kauft.

Die Zufallsgröße X beschreibt die Ausgaben in Euro eines Fans im Fanshop.

Die folgende Tabelle zeigt die unvollständige Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße X.

x							160
$P(X = x)$	0,1	0,2	0,2	0,15	0,05	0,25	0,05

4.1 Vervollständigen Sie die Tabelle, indem Sie die fehlenden Zufallswerte von x von links nach rechts der Größe nach aufsteigend in die obere Tabellenzeile eintragen. Berechnen Sie anschließend die durchschnittlichen Tageseinnahmen des Fanshops pro Spieltag, wenn im Fanshop mit durchschnittlich 250 Fans an einem Spieltag zu rechnen ist.

4.2 Aufgrund der zunehmenden Anzahl an umweltbewussten Fans überlegt der Inhaber des Fanshops nur noch GREEN-Label zertifizierte Trikots und Hosen anzubieten. Er müsste dafür aber die Verkaufspreise dieser Artikel deutlich erhöhen. Ein befreundeter Geschäftsmann behauptet, dass erfahrungsgemäß mindestens 80 % der Fans den Preisanstieg akzeptieren würden und dadurch eine deutliche Gewinnsteigerung zu erwarten sei. Sollte dies der Fall sein, will der Inhaber des Fanshops die Umstellung wagen. Allerdings glaubt er, dass deren Anteil deutlich geringer ist (Gegenhypothese). Um eine Entscheidung zu treffen, befragt er 100 zufällig ausgewählte Fans, ob diese höhere Preise für die GREEN-Label zertifizierten Produkte in Kauf nehmen würden.

Entwickeln Sie für den Inhaber des Fanshops einen geeigneten Hypothesentest auf einem Signifikanzniveau von 5 %. Geben Sie an, welche Entscheidung der Test nahelegt, wenn 75 Kunden angeben, dass sie die höheren Preise für die GREEN-Label zertifizierten Produkte akzeptieren würden.

23

BE

Im Folgenden werden relative Häufigkeiten als Wahrscheinlichkeiten interpretiert.

1.0 An einer Fachoberschule wird eine Umfrage zu den Zukunftsplänen der Schülerinnen und Schüler durchgeführt. Laut dieser Umfrage möchte nach dem Fachabitur ein Fünftel aller Befragten ein sogenanntes „Gap Year“ (G) machen. 70 % davon haben vor, in diesem Jahr ins Ausland zu gehen ($\overline{D}$), alle anderen verbringen die Zeit lieber in Deutschland (D). Von denjenigen, die ins Ausland gehen, machen dort 35 % Work & Travel (W), 30 % ein Praktikum (P) und der Rest andere Tätigkeiten (T) wie zum Beispiel Sprachreisen, Urlaub oder arbeiten als Au-pair. Die Hälfte derer, die während ihres Gap Years in Deutschland bleiben, nutzt die Zeit für ein Praktikum und die andere Hälfte für einen Freiwilligendienst (F). Von den Befragten, die sich gegen eine Auszeit ($\overline{G}$) nach dem Fachabitur entscheiden, planen 40 % zu studieren (S). Der Rest wird zu gleichen Teilen die dreizehnte Klasse (K) besuchen oder eine Ausbildung beginnen (A). Die Befragung einer zufällig ausgewählten Schülerin oder eines zufällig ausgewählten Schülers nach den Zukunftsplänen wird als Zufallsexperiment aufgefasst.

5 **1.1** Bestimmen Sie unter Verwendung eines Baumdiagramms die Wahrscheinlichkeiten aller acht Elementarereignisse des Zufallsexperiments.

4 **1.2** Gegeben sind die folgenden Ereignisse:

E_1: „Eine zufällig ausgewählte befragte Person plant ein Gap Year im Ausland.“

$E_2 = \left\{ \left(G;\overline{D};P \right);\left(G;D;P \right) \right\}$

$E_3 = \overline{E_1 \cap E_2}$

Geben Sie E_1 in aufzählender Mengenschreibweise an und formulieren Sie E_2 möglichst einfach im Sachzusammenhang. Berechnen Sie anschließend $P\left(E_3\right)$.

5 **2** Die Schülerin Lena entscheidet sich für ein Gap Year mit Auslandsaufenthalt in Asien. Sie findet einen Job bei einer Auffangstation für Meerestiere. Im Durchschnitt sind 65 von 100 behandelten Tieren in der Station Meeresschildkröten (S). Insgesamt sind 60 % aller Verletzungen und Krankheiten bei Meerestieren die Folge von Plastikmüll (M) in den Ozeanen, zwei Drittel davon treten bei Meeresschildkröten auf.
Erstellen Sie für den beschriebenen Sachverhalt eine vollständig ausgefüllte Vierfeldertafel. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses $E_4 = M \cup S$ und interpretieren Sie Ihr Ergebnis im Sinne der vorliegenden Thematik.

2 **3** Eine von Lenas Lieblingsaufgaben in der Auffangstation ist das Freilassen von Baby Schildkröten an möglichst sicheren Stränden. Sie weiß jedoch, dass die Überlebenschance der Baby-Schildkröten in den ersten paar Tagen aufgrund der hohen Anzahl an Fressfeinden nur bei 10 % liegt.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass von 20 freigelassenen Schildkrötenbabys mindestens drei, aber höchstens sieben Tiere überleben.

Fortsetzung siehe nächste Seite

BE

4.0 Lena möchte die Reisezeit ihres Work & Travel Aufenthalts nutzen, um Tauchen zu lernen. Eine Tauchschule in Thailand macht Werbung mit der Behauptung, dass bei mindestens 70 % aller Tauchgänge Meeresschildkröten beobachtet werden können. Lena vermutet allerdings, dass der Anteil deutlich geringer ist (Gegenhypothese).
Um ihren Verdacht mit einem Hypothesentest zu überprüfen, befragt sie jeweils einen Teilnehmer bzw. eine Teilnehmerin von 50 verschiedenen Tauchgängen, ob Schildkröten gesehen wurden. Lena möchte sich bei der Annahme ihrer Vermutung mit einer Wahrscheinlichkeit von höchstens 3 % irren.

5 **4.1** Geben Sie für diesen Test die Testgröße sowie die Nullhypothese an. Ermitteln Sie den größtmöglichen Ablehnungsbereich der Nullhypothese und geben Sie an, welche Entscheidung der Test nahelegt, wenn auf genau 20 Tauchgängen keine Meeresschildkröten gesehen werden.

2 **4.2** Berechnen Sie für den in Teilaufgabe 4.1 entwickelten Test die Wahrscheinlichkeit des Fehlers 2. Art, wenn tatsächlich nur auf der Hälfte aller Tauchgänge mit der Tauchschule Meeresschildkröten gesehen werden.

23