Analysis II

1.1 Aufgrund der einfachen und der doppelten Nullstelle lässt sich folgende Rohgleichung aufstellen: $f(x)=a(x+1)(x-4)^2$

Einsetzen des Punktes (0/2) ergibt:

$$\underline{f(0)=2}:\ a\cdot 1\cdot(-4)^2=2 \quad \Rightarrow 16a=2 \ \Rightarrow a=\frac{1}{8}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{f(x)=\frac{1}{8}(x+1)(x-4)^2}}$$

1.2.1 Tangente in (0/2)

$$f(x)=\frac{1}{8}(x^3-7x^2+8x+16);\ f'(x)=\frac{1}{8}(3x^2-14x+8)$$

$$f'(0)=\frac{1}{8}\cdot 8=1=m$$

Einsetzen des Punktes und der Steigung in die allg. Geradengleichung ergibt:

$$2=1\cdot 0+t \ \Rightarrow t=2 \ \Rightarrow \underline{\underline{g(x)=x+2}}$$

1.2.2 $\underline{f'(x)=-2}:\ \frac{1}{8}(3x^2-14x+8)=-2 \quad \Rightarrow 3x^2-14x+8=-16 \quad \Rightarrow 3x^2-14x+24=0$

$$\Rightarrow x_{1/2}=\frac{14\pm\sqrt{(-14)^2-4\cdot 3\cdot 24}}{6}=\frac{14\pm\sqrt{-92}}{6}$$

Wegen der negativen Diskriminante (Term unter der Wurzel) hat die Gleichung keine Lösung. Es gibt daher keinen Punkt des Graphen G_f, in dem eine Tangente mit der Steigung $m=-2$ angelegt werden kann.

1.2.3 Wendepunkt

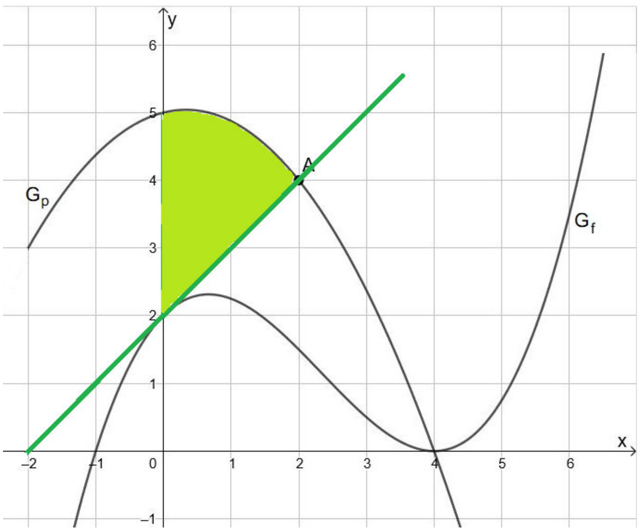
$$f''(x) = \frac{1}{8}(6x - 14)$$

$$\underline{f''(x) = 0}: \ \frac{1}{8}(6x-14) = 0 \Rightarrow 6x - 14 = 0 \Rightarrow 6x = 14 \Rightarrow x'' = \frac{7}{3}$$

$$f\left(\frac{7}{3}\right) = \frac{1}{8}\left(\frac{7}{3}+1\right)\left(\frac{7}{3}-4\right)^2 = \frac{1}{8}\left(\frac{10}{3}\right)\left(-\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{10}{24}\left(\frac{25}{9}\right) = \frac{125}{108}$$

Da es sich um eine einfache Nullstelle der 2. Ableitung handelt, liegt dort ein Wendepunkt vor: $\underline{\underline{W\left(\frac{7}{3} / \frac{125}{108}\right)}}$

1.2.4



Es handelt sich um eine „Wurstfläche“ zwischen zwei Graphen:

$$\int_0^2 p(x) - h(x)\,dx = \int_0^2 -\frac{3}{8}x^2 + \frac{1}{4}x + 5 - (x+2)\,dx = \int_0^2 -\frac{3}{8}x^2 + \frac{1}{4}x + 5 - x - 2\,dx$$

$$= \int_0^2 -\frac{3}{8}x^2 - \frac{3}{4}x + 3\,dx = \left[-\frac{3}{8}\cdot\frac{x^3}{3} - \frac{3}{4}\cdot\frac{x^2}{2} + 3x\right]_0^2 = \left[-\frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{8}x^2 + 3x\right]_0^2$$

$$= \left[-\frac{1}{8}\cdot 2^3 - \frac{3}{8}\cdot 2^2 + 3\cdot 2\right] - 0 = -1 - 1{,}5 + 6 = 3{,}5$$

$\Rightarrow \underline{\underline{A = 3{,}5}}$

2.1 Einsetzen der beiden gegebenen y-Werte ergibt:

$$\underline{p(0)=6{,}0}:\ 3{,}2+b\cdot\underbrace{e^{0}}_{=1}=6{,}0\ \Rightarrow 3{,}2+b=6{,}0\ \Rightarrow \underline{\underline{b=2{,}8}}$$

$$\underline{p(40)=3{,}5}:\ 3{,}2+2{,}8\cdot e^{-k\cdot 40}=3{,}5\ \Rightarrow 2{,}8\cdot e^{-k\cdot 40}=0{,}3$$

$$\Rightarrow e^{-k\cdot 40}=\frac{3}{28}\ \Rightarrow -40k=\ln\frac{3}{28}\ \Rightarrow \underline{\underline{k=-\frac{1}{40}\ln\frac{3}{28}\approx 0{,}056}}$$

2.2.1 $\underline{p(t)=4{,}0}:\ 3{,}2+2{,}8\cdot e^{-0{,}056\cdot t}=4{,}0\quad \Rightarrow 2{,}8\cdot e^{-0{,}056\cdot t}=0{,}8$

$$\Rightarrow e^{-0{,}056\cdot t}=\frac{8}{28}\ \Rightarrow -0{,}056t=\ln\frac{8}{28}\ \Rightarrow \underline{\underline{t\approx 22{,}4}}$$

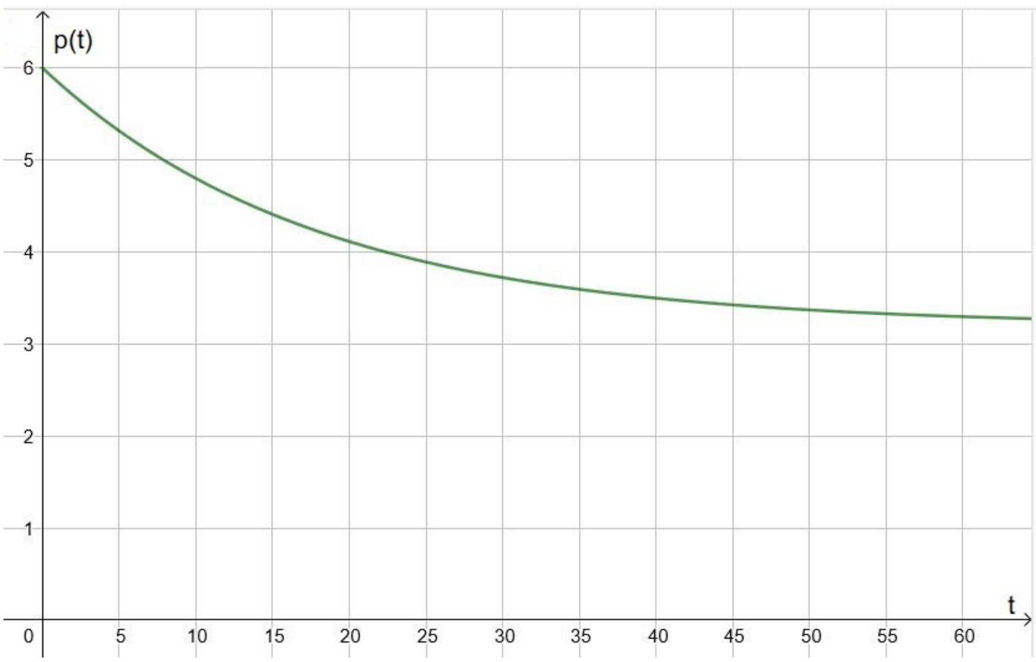
Nach gut 22 Stunden ist die Zugabe des Sauerteigs möglich.

$$\dot{p}(t)=2{,}8\cdot e^{-0{,}056\cdot t}(-0{,}056)=-0{,}1568\cdot e^{-0{,}056\cdot t}$$

$$\dot{p}(22{,}4)=-0{,}1568\cdot e^{-0{,}056\cdot 22{,}4}\approx \underline{\underline{-0{,}045}}$$

Der pH-Wert nimmt zu diesem Zeitpunkt um etwa 0,045 pro Stunde ab.

2.2.2



3.1 Für das Volumen gilt:

$$V = r^2 \cdot \pi \cdot h + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot r^3 \pi$$

h eingesetzt: $V(r) = r^2 \cdot \pi \cdot \left(\frac{4}{r} - \frac{3r}{2} \right) + \frac{2}{3} \cdot r^3 \pi = \pi \cdot \left(4r - \frac{3}{2} r^3 \right) + \frac{2}{3} \cdot r^3 \pi$

$$= 4r\pi - \frac{3}{2} r^3 \pi + \frac{2}{3} \cdot r^3 \pi = \underline{\underline{-\frac{5}{6} r^3 \pi + 4r\pi}}$$

3.2 $D_V = [0{,}85; 1{,}4]$

Absolutes Maximum

$$V'(r) = -\frac{5}{2} r^2 \pi + 4\pi; \quad V''(r) = -5r\pi$$

$\underline{V'(r) = 0:}\ -\frac{5}{2} r^2 \pi + 4\pi = 0 \quad \Rightarrow \frac{5}{2} r^2 \pi = 4\pi \quad \Rightarrow r^2 = \frac{8}{5} \quad \Rightarrow r' = \sqrt{\frac{8}{5}} \quad (r > 0!)$

$$V''\left(\sqrt{\frac{8}{5}} \right) = -5 \cdot \sqrt{\frac{8}{5}} \pi < 0$$

Es handelt sich also um ein Maximum. Da es im Definitionsbereich kein anderes Extremum gibt, ist dies ein absolutes Maximum (die Ränder spielen also keine Rolle).

$$V_{max} = V\left(\sqrt{\frac{8}{5}} \right) = -\frac{5}{6} \cdot \sqrt{\frac{8}{5}}^3 \cdot \pi + 4 \cdot \sqrt{\frac{8}{5}} \cdot \pi = -\frac{5}{6} \cdot \frac{8}{5} \cdot \sqrt{\frac{8}{5}} \cdot \pi + 4 \cdot \sqrt{\frac{8}{5}} \cdot \pi$$

$$= -\frac{4}{3} \cdot \sqrt{\frac{8}{5}} \cdot \pi + 4 \cdot \sqrt{\frac{8}{5}} \cdot \pi = \underline{\underline{\frac{8}{3} \cdot \sqrt{\frac{8}{5}} \cdot \pi \approx 10{,}6}}$$

Das maximale Volumen der Tauchflasche beträgt $10{,}6\ dm^3$.