

Analysis I

1.1 Nullstellen

$$\underline{f(x) = 0}: -\frac{1}{2}x^4 - 2x^3 - 2x^2 = 0 \Rightarrow x^2 \left(-\frac{1}{2}x^2 - 2x - 2 \right) = 0 \Rightarrow \underline{\underline{x_{1/2} = 0}}$$

$$-\frac{1}{2}x^2 - 2x - 2 = 0 \Rightarrow x^2 + 4x + 4 = 0 \Rightarrow (x+2)^2 = 0 \Rightarrow \underline{\underline{x_{3/4} = -2}}$$

$$1.2 \quad f'(x) = -2x^3 - 6x^2 - 4x; \quad f''(x) = -6x^2 - 12x - 4$$

$$\underline{f'(x) = 0}: -2x^3 - 6x^2 - 4x = 0 \Rightarrow -2x(x^2 + 3x + 2) = 0 \Rightarrow x_1' = 0$$

$$x^2 + 3x + 2 = 0 \Rightarrow x_{2/3}' = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2} = \frac{-3 \pm 1}{2}$$
$$\Rightarrow x_2' = -2; \quad x_3' = -1$$

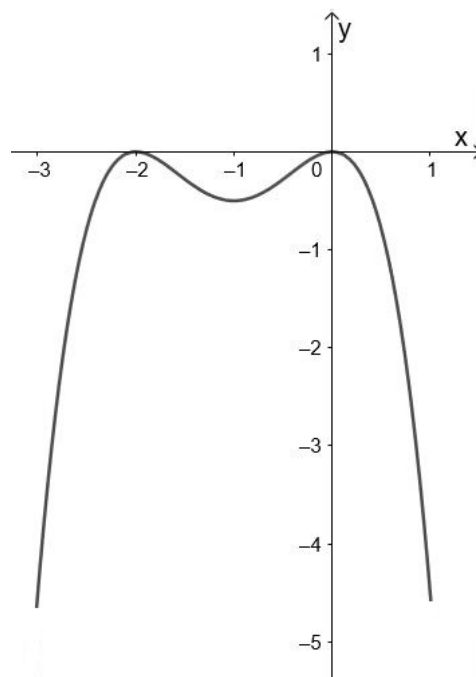
$$f(0) = 0; \quad f''(0) = -4 < 0 \Rightarrow \underline{\underline{HOP(0/0)}}$$

$$f(-1) = -\frac{1}{2} \cdot 1 - 2(-1) - 2 \cdot 1 = -0,5;$$

$$f''(-1) = -6 \cdot 1 - 12(-1) - 4 = 2 > 0 \Rightarrow \underline{\underline{TIP(-1/-0,5)}}$$

$$f(-2) = 0 \text{ (s.o.)}; \quad f''(-2) = -6 \cdot 4 - 12(-2) - 4 = -4 < 0 \Rightarrow \underline{\underline{HOP(-2/0)}}$$

1.3

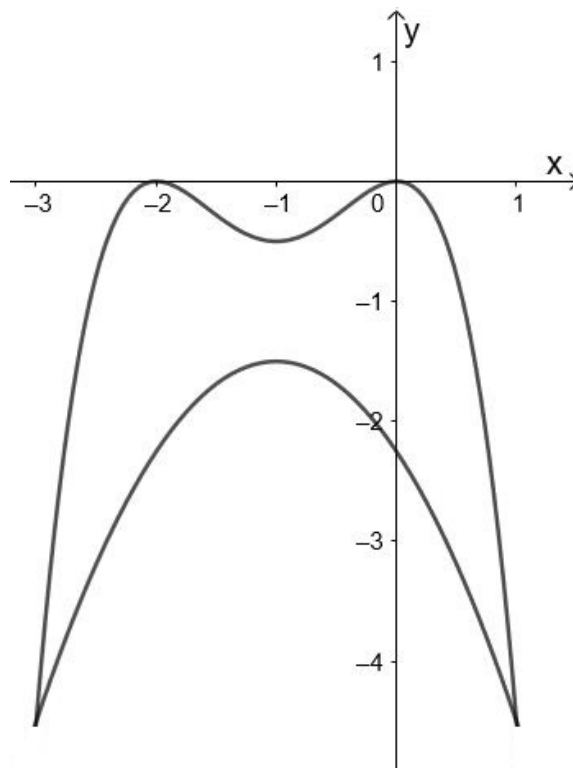


1.4.1 Mit dem Scheitel lässt sich die Scheitelform der Parabel aufstellen:

$$p(x) = a(x+1)^2 - 1,5$$

$$B(1/-4,5) \text{ eingesetzt: } -4,5 = a(1+1)^2 - 1,5 \Rightarrow -3 = 4a \Rightarrow a = -\frac{3}{4}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow p(x) &= -\frac{3}{4}(x+1)^2 - 1,5 = -\frac{3}{4}(x^2 + 2x + 1) - 1,5 = -\frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{2}x - \frac{3}{4} - 1,5 \\ &= \underline{\underline{-\frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{2}x - \frac{9}{4}}} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 1.4.2 \quad \int_{-3}^1 f(x) - p(x) dx &= \int_{-3}^1 -\frac{1}{2}x^4 - 2x^3 - 2x^2 - \left(-\frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{2}x - \frac{9}{4}\right) dx \\
 &= \int_{-3}^1 -\frac{1}{2}x^4 - 2x^3 - 2x^2 + \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{9}{4} dx \\
 &= \int_{-3}^1 -\frac{1}{2}x^4 - 2x^3 - \frac{5}{4}x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{9}{4} dx \\
 &= \left[-\frac{1}{2} \cdot \frac{x^5}{5} - 2 \cdot \frac{x^4}{4} - \frac{5}{4} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{3}{2} \cdot \frac{x^2}{2} + \frac{9}{4}x \right]_{-3}^1 \\
 &= \left[-\frac{x^5}{10} - \frac{x^4}{2} - \frac{5x^3}{12} + \frac{3x^2}{4} + \frac{9}{4}x \right]_{-3}^1 \\
 &= \left[-\frac{1}{10} - \frac{1}{2} - \frac{5}{12} + \frac{3}{4} + \frac{9}{4} \right] - \left[\frac{243}{10} - \frac{81}{2} + \frac{135}{12} + \frac{27}{4} - \frac{27}{4} \right] \\
 &= \frac{119}{60} + \frac{99}{20} = \frac{104}{15} \Rightarrow \underline{\underline{A = \frac{104}{15}}}
 \end{aligned}$$

$$2.1 \quad T(5) = 250 \cdot 5 \cdot e^{-0,15} + 22 = 1250 \cdot e^{-0,5} + 22 \approx 780$$

Nach fünf Minuten beträgt die Temperatur ca. 780 Grad.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} T(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \underbrace{250 \cdot t}_{\rightarrow \infty} \cdot \underbrace{e^{-0,1t}}_{\rightarrow 0} + 22 = \underline{\underline{22}}$$

Langfristig stellt sich theoretisch eine Temperatur von **22 Grad** ein.

2.2 Temperaturmaximum

$$\begin{aligned} \dot{T}(t) &= 250 \cdot e^{-0,1t} + 250 \cdot t \cdot e^{-0,1t} \cdot (-0,1) = 250 \cdot e^{-0,1t} - 25 \cdot t \cdot e^{-0,1t} \\ &= e^{-0,1t} \cdot (250 - 25t) \end{aligned}$$

$$\underline{\dot{T}(t) = 0} : \underbrace{e^{-0,1t}}_{\neq 0} \cdot (250 - 25t) = 0 \Rightarrow 250 - 25t = 0 \Rightarrow 25t = 250 \Rightarrow t' = 10$$

Da es sich um eine einfache Nullstelle der Ableitung handelt (mit Vorzeichenwechsel), liegt dort ein Extremum vor.

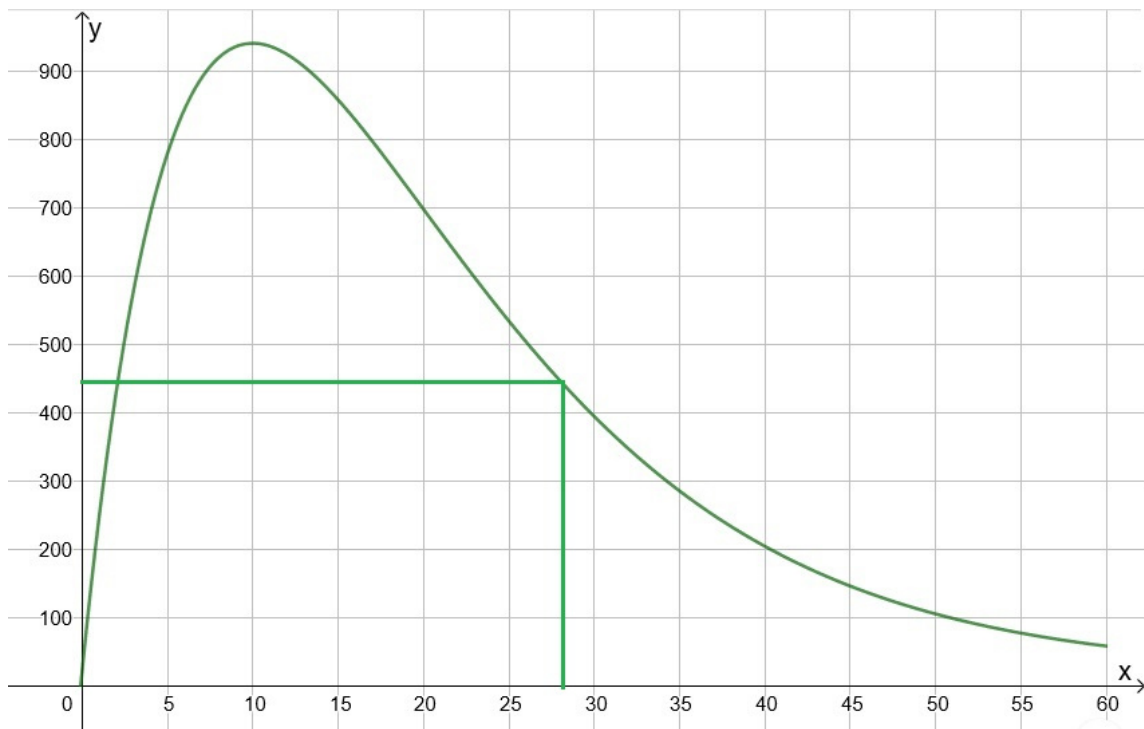
$$\dot{T}(9) = \underbrace{e^{-0,19}}_{>0} \cdot \underbrace{(250 - 25 \cdot 9)}_{>0} > 0$$

Die Ableitung geht also von plus nach minus. Es liegt daher ein Maximum vor.

$$T(10) = 250 \cdot 10 \cdot e^{-0,1 \cdot 10} + 22 = 2500 \cdot e^{-1} + 22 \approx 941,7$$

Nach 10 Minuten wird die maximale Temperatur von 941,7° erreicht.

2.3



Anfangstemperatur

$$T(0) = 250 \cdot 0 \cdot e^0 + 22 = 22$$

Das 20-fache beträgt 440 Grad. Aus dem Graphen ergibt sich:
 im Abkühlvorgang wird dieser Wert nach ca. **28 Minuten** erreicht.

2.4 Wendepunkt

$$\dot{T}(20) = e^{-0,1 \cdot 20} \cdot (250 - 25 \cdot 20) = e^{-2} \cdot (-250) \approx -33,8$$

Nach 20 Minuten kühlt das Aluminium am stärksten ab. Die Abkühlung beträgt
 in diesem Zeitpunkt knapp **34 Grad Celsius / min**.