Analysis

1 Für die Fläche brauchen wir zunächst die Nullstellen von p:

$\underline{p(x)=0}:\ -x^2+1=0 \quad \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x_{1/2}=\pm 1$

Da der Graph von p achsensymmetrisch zur y-Achse verläuft, kann zunächst die halbe Fläche berechnet werden:

$$\int_0^1 p(x)dx = \int_0^1 -x^2+1\,dx = \left[-\frac{x^3}{3}+x\right]_0^1 = -\frac{1^3}{3}+1-0=\frac{2}{3} \quad \Rightarrow A = 2\cdot\frac{2}{3}=\underline{\underline{\frac{4}{3}}}$$

2.1 **Nullstellen**

$\underline{k(x)=0}:\ 0{,}5(x-3)^2\left(2x+\frac{4}{3}\right)=0 \Rightarrow \underline{\underline{x_{1/2}=3\ \text{(doppelt)}}}$

$2x+\frac{4}{3}=0 \Rightarrow \underline{\underline{x_3=-\frac{2}{3}\ \text{(einfach)}}}$

Wegen des positiven Leitkoeffizienten hat der Graph von k zuerst einen HOP und dann einen TIP. Der TIP liegt somit bei $x_{1/2}=3$. Zwischen den Nullstellen muss ein weiteres Extremum liegen. Da dies ein lokaler Hochpunkt ist, gilt:

$\underline{\underline{-\frac{2}{3}<x_{HOP}<3}}$

2.2 k ist eine ganzrationale Funktion dritten Grades. Der Graph der Ableitung ist daher eine Parabel. Der positive Leitkoeffizient bleibt beim Ableiten positiv. Daher ist die Parabel nach oben geöffnet. Einziger Graph, der beide Bedingungen erfüllt, ist G_C.

Alternative Begründung: Wegen des TIP bei $x_{1/2}=3$ muss die Ableitung dort eine einfache Nullstelle von Minus nach Plus haben. G_C ist der einzige Graph mit einer solchen Nullstelle. Auch andere Begründungen sind möglich.

3.1 **Gemeinsamer Punkt P**

$\underline{g(x)=h(x)}:\ 2\cdot e^x-1=e^{2x} \quad \Rightarrow e^{2x}-2e^x=-1 \quad \Rightarrow e^{2x}-2e^x+1=0$

$\Rightarrow \left(e^x-1\right)^2=0 \quad \Rightarrow e^x-1=0 \quad \Rightarrow e^x=1 \quad \Rightarrow x=0$

$h(0)=e^0=1 \Rightarrow \underline{\underline{P(0/1)}}$

3.2 $j(x)=-g(x)+2=-\left(2\cdot e^x-1\right)+2=\underline{\underline{-2\cdot e^x+3}}$

4 G_f ist punktsymmetrisch zum Ursprung.

f ist eine Funktion vierten Grades. Deren Graph ist allenfalls achsen-, aber niemals punktsymmetrisch. Die Aussage ist daher **falsch**.

G_f besitzt genau zwei Wendepunkte.

An den Wendepunkten ist die Steigung maximal bzw. minimal. Die Ableitung hat dort also Extrempunkte. Der Graph der Ableitung hat zwei Extrempunkte.
Die Aussage ist daher **wahr**.

G_f besitzt einen globalen Tiefpunkt.

Bei einem relativen TIP hat die Ableitung eine einfache Nullstelle von minus nach plus. Der Graph der Ableitung hat zwei solche Stellen.
Außerdem hat die Ableitung und somit auch f einen positiven Leitkoeffizienten. Es liegt also grds. eine W-Form vor.
Ob es (genau) einen globalen TIP gibt, hängt davon ab, ob beide relativen Tiefpunkte den gleichen y-Wert haben. Nur wenn dies nicht der Fall ist, gibt es **einen** globalen TIP. Sonst zwei. Ob dies der Fall ist, lässt sich vorliegend aber nicht beurteilen. Daher **nicht zu entscheiden (n)**.

Hinweis: es lässt sich grds. auch argumentieren, dass auch der Fall, dass es zwei globale Tiefpunkte gibt, von der Aussage umfasst ist, da es ja nicht „genau einen…“ heißt. Dann müsste „wahr“ angekreuzt werden. Dann aber mit zusätzlicher Begründung!

F hat genau vier Nullstellen.

Als ganzrationale Funktion fünften Grades hat F maximal fünf Nullstellen. Genau vier Nullstellen sind es, wenn genau eine Nullstelle doppelt ist. Dies lässt sich aber dem Graphen der Ableitung nicht entnehmen. Daher **nicht zu entscheiden (n)**.

Für $x \to -\infty$ gilt: $f(x) \to \infty$

Die Ableitung wird in diesem Fall immer negativer. Der Graph von f fällt daher in diesem Bereich. Die Aussage ist daher **wahr**.

Hinweis: Wegen der vorgegebenen Bewertung ist es sinnvoll, wenn man sich nicht sicher ist, kein Kreuz zu machen.

