Analysis II

1.1 $f(x) = ax^3 + bx^2 - 0{,}9x + c;\ f'(x) = 3ax^2 + 2bx - 0{,}9$

I $\quad f(0) = 2 \Rightarrow \underline{\underline{c = 2}}$

II $\quad f'(2) = 0 \Rightarrow 3a \cdot 2^2 + 2b \cdot 2 - 0{,}9 = 0 \Rightarrow 12a + 4b = 0{,}9$

$\Rightarrow 4b = 0{,}9 - 12a \Rightarrow b = 0{,}225 - 3a$ (II')

III $\quad f(2) = 1{,}2 \Rightarrow a \cdot 2^3 + b \cdot 2^2 - 0{,}9 \cdot 2 + c = 1{,}2 \Rightarrow 8a + 4b - 1{,}8 + c = 1{,}2$

$\Rightarrow 8a + 4b + c = 3$ (III')

I und II' in III': $8a + 4(0{,}225 - 3a) + 2 = 3 \Rightarrow 8a + 0{,}9 - 12a = 1$

$\Rightarrow -4a = 0{,}1 \Rightarrow \underline{\underline{a = -0{,}025}}$

in II': $b = 0{,}225 - 3(-0{,}025) \Rightarrow \underline{\underline{b = 0{,}3}}$

1.2.1 Extrema

Wegen der eingeschränkten Definitionsmenge müssen auch die Randextrema bestimmt werden.

$g(x) = f(x) = -0{,}025\left(x^3 - 12x^2 + 36x - 80\right);\ D_g = [0;7]$

$g'(x) = -0{,}025\left(3x^2 - 24x + 36\right);\ g''(x) = -0{,}025(6x - 24)$

$\underline{g'(x) = 0}$: $-0{,}025\left(3x^2 - 24x + 36\right) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 24x + 36 = 0$

$$\Rightarrow x_{1/2}' = \frac{24 \pm \sqrt{24^2 - 4 \cdot 3 \cdot 36}}{6} = \frac{24 \pm 12}{6} \Rightarrow x_1' = 2;\ x_2' = 6$$

Beide Nullstellen der Ableitung sind einfach und gehören auch zum Definitionsbereich von g, daher liegen dort Extrempunkte vor.

$g''(2) = -0{,}025(6 \cdot 2 - 24) > 0$

$g(2) = f(2) = 1{,}2$ (siehe Angabe 1.1) $\Rightarrow \underline{\underline{TIP(2\,/\,1{,}2)}}$

$g''(6) = -0{,}025(6 \cdot 6 - 24) < 0$

$g(6) = -0{,}025\left(6^3 - 12 \cdot 6^2 + 36 \cdot 6 - 80\right) = -0{,}025(-80) = 2 \Rightarrow \underline{\underline{HOP(6\,/\,2)}}$

$g(0) = f(0) = 2$ (siehe Angabe 1.1) $\Rightarrow \underline{\underline{HOP(0\,/\,2)}}$

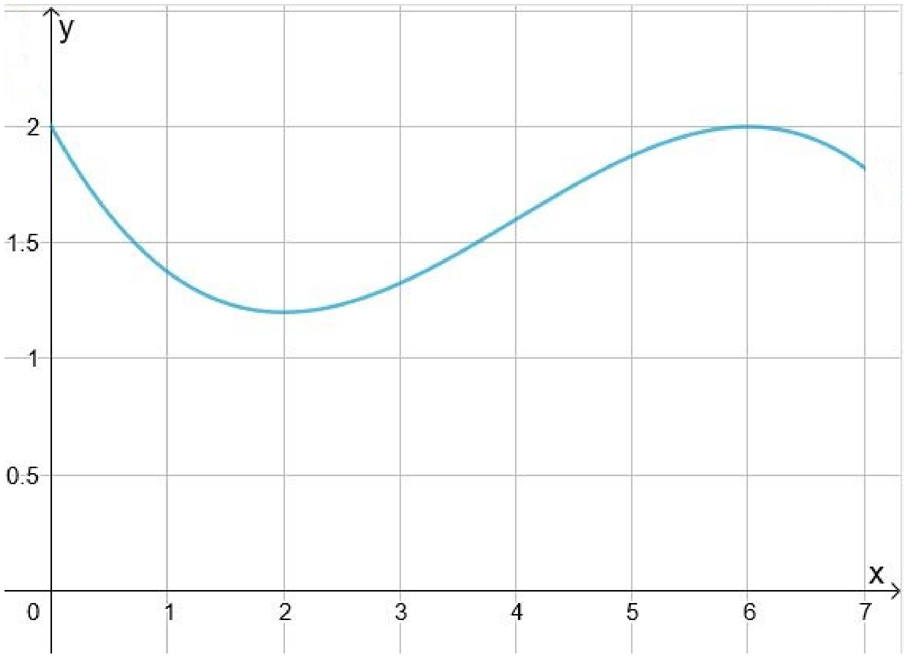
$g(7) = -0{,}025\left(7^3 - 12 \cdot 7^2 + 36 \cdot 7 - 80\right) = -0{,}025(-73) = 1{,}825$

$\Rightarrow \underline{\underline{TIP(7\,/\,1{,}825)}}$

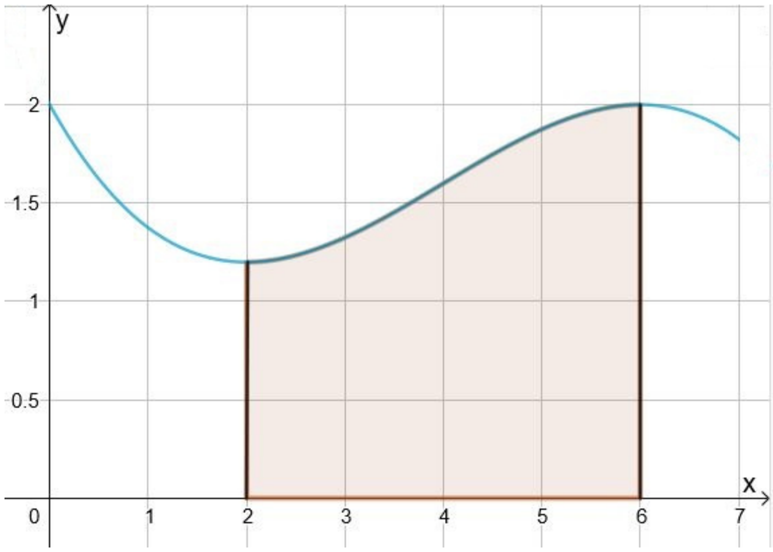
Wertemenge (Intervall vom tiefsten bis zum höchsten Punkt)

$\underline{\underline{W_g = [1,2;2]}}$

1.2.2



1.2.3 Flächenberechnung



$$\int_2^6 g(x)\,dx = \int_2^6 -0{,}025\left(x^3-12x^2+36x-80\right)dx = -0{,}025\left[\frac{x^4}{4}-12\cdot\frac{x^3}{3}+36\cdot\frac{x^2}{2}-80x\right]_2^6$$

$$= -0{,}025\left[\frac{x^4}{4}-4x^3+18x^2-80x\right]_2^6$$

$$= -0{,}025\left[\left(\frac{6^4}{4}-4\cdot 6^3+18\cdot 6^2-80\cdot 6\right)-\left(\frac{2^4}{4}-4\cdot 2^3+18\cdot 2^2-80\cdot 2\right)\right]$$

$$= -0{,}025\left[-372-(-116)\right] = -0{,}025\left[-256\right] = 6{,}4$$

$\Rightarrow \underline{\underline{A = 6{,}4}}$

2.1 $\tilde{I}(t) = 2000\cdot 0{,}5^{\frac{t}{4{,}88}} = 2000\cdot e^{\ln 0{,}5^{\frac{t}{4{,}88}}} = 2000\cdot e^{t\cdot\ln 0{,}5^{\frac{1}{4{,}88}}} = 2000\cdot e^{t\cdot(-0{,}142)} = \underline{\underline{2000\cdot e^{-0{,}142t}}}$

2.2 $\underline{\tilde{I}(t) = 100}$: $2000\cdot e^{-0{,}142t} = 100 \quad\Rightarrow e^{-0{,}142t} = 0{,}05 \quad\Rightarrow -0{,}142t = \ln 0{,}05$

$$\Rightarrow t = \frac{\ln 0{,}05}{-0{,}142} = 21{,}0967\ldots \Rightarrow \underline{\underline{t_{end} = 21}}$$

$\underline{\underline{D_{\tilde{I}} = [0;21]}}$

3.1 Eine klassische Optimierungsaufgabe:

Für das Volumen gilt: $V = a^2 \cdot h$

Nebenbedingung: $2a + h = 45 \quad \Rightarrow h = 45 - 2a$

Eingesetzt: $V(a) = a^2 \cdot (45 - 2a) = \underline{\underline{45a^2 - 2a^3}}$

3.2 $D_V = [10;20]$

Relatives Maximum

$V'(a) = 90a - 6a^2;\ V''(a) = 90 - 12a$

$\underline{V'(a) = 0}$: $90a - 6a^2 = 0 \quad \Rightarrow 6a(15 - a) = 0 \quad \Rightarrow a_1' = 15;\ a_2' = 0 \notin D_V$

$V''(15) = 90 - 12 \cdot 15 < 0 \Rightarrow$ Maximum bei $a = 15$

Da es im Definitionsbereich kein weiteres Extremum gibt, ist das Maximum absolut (= global).

Es sind also die Maße $a = 15\,\text{cm}$ und $h = 45 - 2 \cdot 15 = 15\,\text{cm}$ zu wählen.
Der Körper ist somit ein Würfel.

Dessen Volumen beträgt $V = 15^3 = \underline{\underline{3375\,\text{cm}^3}}$.

3.3 Factus-Print

Für die zu bedruckende Oberfläche (fünf Seitenflächen) gilt:

$S = 6000 \cdot 15^2 \cdot 5 = 6\,750\,000\,\text{cm}^2$

Kosten: $\dfrac{6\,750\,000}{1000} \cdot 0{,}08\ \text{Euro} = 540{,}00\ \text{Euro}$

PappDruck

Kosten: $6000 \cdot 0{,}09\ \text{Euro} \cdot \dfrac{9}{10} = 486{,}00\ \text{Euro}$

Das Angebot von PappDruck ist wegen des Rabatts aus wirtschaftlicher Sicht günstiger. Dort sollte bestellt werden.

