

Analysis II

- 1.1 Nach etwa 5,3 Sekunden taucht der Delfin auf und springt bis zu einer Höhe von ca. 1,5 m in die Luft. Nach 7 Sekunden taucht er wieder ins Wasser.

Das Intervall $[0; \infty[$ ist keine sinnvolle Definitionsmenge für T , da dann $T \rightarrow \infty$. Der Delfin kann aber nicht unendlich tief tauchen, da er Sauerstoff benötigt. Auch wäre ein solcher Tauchgang durch den Meeresboden begrenzt.

- 1.2 **Fehlende Nullstelle n_2**

$$T(t) = -\frac{1}{12}(x-1)^2(x-n_2)(x-7)$$

Wir setzen den Punkt S ein:

$$T(0) = -\frac{28}{9} : -\frac{1}{12}(0-1)^2(0-n_2)(0-7) = -\frac{28}{9} \Rightarrow 7n_2 = \frac{112}{3} \Rightarrow \underline{\underline{n_2 = \frac{16}{3}}}$$

- 1.3.1 **Wertemenge**

Zunächst brauchen wir die relativen Extrempunkte:

$$T(t) = -\frac{1}{12}\left(t^4 - \frac{43}{3}t^3 + 63t^2 - 87t + \frac{112}{3}\right); \quad \dot{T}(t) = -\frac{1}{12}(4t^3 - 43t^2 + 126t - 87);$$

$$\ddot{T}(t) = -\frac{1}{12}(12t^2 - 86t + 126)$$

$$\underline{\underline{\dot{T}(t) = 0}} : -\frac{1}{12}(4t^3 - 43t^2 + 126t - 87) = 0 \Rightarrow 4t^3 - 43t^2 + 126t - 87 = 0$$

$$t_1 = 1 \text{ (doppelt Nullstelle, s.o.)}$$

$$(4t^3 - 43t^2 + 126t - 87) : (t-1) = 4t^2 - 39t + 87$$

$$4t^2 - 39t + 87 = 0 \Rightarrow t_{2/3} = \frac{39 \pm \sqrt{39^2 - 4 \cdot 4 \cdot 87}}{8} = \frac{39 \pm \sqrt{129}}{8}$$

$$\Rightarrow t_2 \approx 3,46; \quad t_3 \approx 6,29$$

$$T(1) = 0 \text{ (s.o.)}; \quad \ddot{T}(1) = -\frac{1}{12} \cdot 52 < 0 \Rightarrow \text{HOP}(1/0)$$

$$T(3,46) = -\frac{1}{12}\left(3,46^4 - \frac{43}{3} \cdot 3,46^3 + 63 \cdot 3,46^2 - 87 \cdot 3,46 + \frac{112}{3}\right) \approx -3,34$$

$$\ddot{T}(3,46) = -\frac{1}{12}(12 \cdot 3,46^2 - 86 \cdot 3,46 + 126) = -\frac{1}{12}(-27,90008) > 0$$

$$\Rightarrow \text{TIP}(3,46 / -3,34)$$

$$T(6,29) = -\frac{1}{12} \left(6,29^4 - \frac{43}{3} \cdot 6,29^3 + 63 \cdot 6,29^2 - 87 \cdot 6,29 + \frac{112}{3} \right) \approx 1,58$$

$$\ddot{T}(6,29) = -\frac{1}{12} (12 \cdot 6,29^2 - 86 \cdot 6,29 + 126) = -\frac{1}{12} \cdot 59,8292 < 0$$

$$\Rightarrow \text{HOP}(6,29 / 1,58)$$

Für die Wertemenge brauchen wir noch die beiden Randextrema:

$$T(0) = -\frac{28}{9} \approx -3,11 \text{ (siehe 1.2);}$$

$$T(8) = -\frac{1}{12} \left(8^4 - \frac{43}{3} \cdot 8^3 + 63 \cdot 8^2 - 87 \cdot 8 + \frac{112}{3} \right) = -\frac{98}{9} \approx -10,89$$

Für die Wertemenge brauchen wir den größten und den kleinsten Wert:

$$\underline{W_T = [-10,89; 1,58]}$$

Der Delfin erreicht eine Tiefe von 10,89 m, seine maximale Höhe über Wasser beträgt 1,58 m.

1.3.2 Größte Abtauch- / Auftauchgeschwindigkeit

Die Abtauch- bzw. Auftauchgeschwindigkeit ist minimal bzw. maximal an den Wendestellen von T. Randwerte spielen hier keine Rolle, da diese nicht im Bereich $1 < t < 5,3$ liegen.

$$\begin{aligned} \underline{\ddot{T}(t) = 0}: -\frac{1}{12} (12t^2 - 86t + 126) &= 0 \Rightarrow 12t^2 - 86t + 126 = 0 \\ \Rightarrow 6t^2 - 43t + 63 &= 0 \\ \Rightarrow t_{1/2} = \frac{43 \pm \sqrt{43^2 - 4 \cdot 6 \cdot 63}}{12} &= \frac{43 \pm \sqrt{337}}{12} \Rightarrow t_1 \approx 2,05; t_2 \approx 5,11 \end{aligned}$$

Beide Nullstellen sind einfach, daher liegen an beiden Stellen Wendepunkte vor. Beide Stellen liegen auch im angegebenen Bereich. In Verbindung mit dem gegebenen Graphen ergibt sich, dass bei $t = 2,05$ die Abtauchgeschwindigkeit und bei $t = 5,11$ die Auftauchgeschwindigkeit maximal ist.

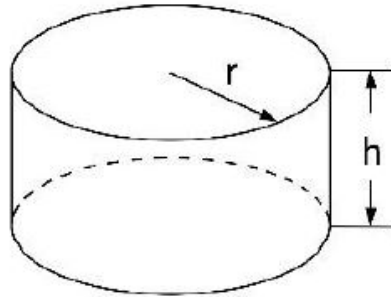
Die Geschwindigkeiten selbst bekommen wir mit der 1. Ableitung:

$$\dot{T}(2,05) = -\frac{1}{12} (4 \cdot 2,05^3 - 43 \cdot 2,05^2 + 126 \cdot 2,05 - 87) \approx -2,09$$

$$\dot{T}(5,11) = -\frac{1}{12} (4 \cdot 5,11^3 - 43 \cdot 5,11^2 + 126 \cdot 5,11 - 87) \approx 2,69$$

Die maximale Auftauchgeschwindigkeit ist betragsmäßig größer als die maximale Abtauchgeschwindigkeit.

2.1



Für das Volumen gilt: $V = r^2 \pi \cdot h$

Die Nebenbedingung ergibt sich hier aus der Oberfläche (Grundkreis + Mantelfläche): $S = r^2 \pi + 2r\pi \cdot h$

$$\begin{aligned} \text{Es gilt: } S = 180\pi : r^2 \pi + 2r\pi \cdot h = 180\pi &\Rightarrow r^2 + 2r \cdot h = 180 \Rightarrow 2r \cdot h = 180 - r^2 \\ &\Rightarrow h = \frac{180 - r^2}{2r} \end{aligned}$$

$$\text{Oben eingesetzt: } V(r) = r^2 \pi \cdot \frac{180 - r^2}{2r} = \frac{1}{2} r \pi \cdot (180 - r^2) = \underline{\underline{90r\pi - \frac{1}{2}r^3\pi}}$$

Der Durchmesser soll maximal 20 m betragen, somit darf der Radius maximal 10 m sein. Dieser muss außerdem positiv sein. $\Rightarrow \underline{\underline{D_V =]0;10]}}$

2.2 Maximales Volumen

$$V'(r) = 90\pi - \frac{3}{2}r^2\pi$$

$$\underline{V'(r) = 0} : 90\pi - \frac{3}{2}r^2\pi = 0 \Rightarrow 90 - \frac{3}{2}r^2 = 0 \Rightarrow \frac{3}{2}r^2 = 90 \Rightarrow r^2 = 60 \Rightarrow r = \sqrt{60} = \underline{\underline{2\sqrt{15}}}$$

Die negative Lösung ist nicht definiert.

Der Graph der Ableitung ist eine Parabel, die nach unten geöffnet ist. Diese verläuft an der rechten Nullstelle daher von plus nach minus. Daher hat der Graph von V an der Stelle $r = 2\sqrt{15}$ einen HOP. Das Volumen des Beckens ist dort maximal. Da es im Definitionsbereich kein weiteres Extremum gibt, handelt es sich um ein absolutes Extremum.

$$\text{Es beträgt: } V(\sqrt{60}) = 90\sqrt{60} \cdot \pi - \frac{1}{2}\sqrt{60}^3 \cdot \pi \approx 1460 \text{ m}^3$$

Drei Delfine benötigen $360 \cdot 3 = 1080 \text{ m}^3$. Das Becke ist also ausreichend groß.

2.3 Grundfläche

$$A_0 = (2\sqrt{15})^2 \pi = 60\pi \approx \underline{\underline{188,5 \text{ m}^2}}$$

2.4.1 Fläche des Algenteppichs

$$\underline{\underline{A(t) = 0,5 \cdot 2^t}}$$

2.4.2

$$\tilde{A}(t) = 0,5 \cdot e^{\ln 2^t} = 0,5 \cdot e^{t \cdot \ln 2} = \underline{\underline{0,5 \cdot e^{0,6931t}}}$$

Zwei Drittel der Grundfläche sind $\frac{2}{3} \cdot 188,5 \approx 125,67$.

$$\underline{\tilde{A}(t) = 125,67} : 0,5 \cdot e^{0,6931t} = 125,67 \Rightarrow e^{0,6931t} = 251,33 \Rightarrow 0,6931t = \ln 251,33$$

$$\Rightarrow t = \frac{\ln 251,33}{0,6931} = 7,974...$$

Nach knapp **acht Tagen** sind zwei Drittel der Grundfläche mit Algen bedeckt.