Teil 1

Analysis

1.1 g hat eine zur y-Achse symmetrische Definitionsmenge und ausschließlich gerade Potenzen von x. Daher ist der Graph von g symmetrisch zur y-Achse.

1.2 relative Extremstellen

$$g'(x) = -\frac{4}{4}x^3 + 4x = -x^3 + 4x$$

$$\underline{g'(x) = 0}: \; -x^3 + 4x = 0 \quad \Rightarrow x(-x^2+4) = 0 \Rightarrow \underline{\underline{x_1 = 0}}$$

$$-x^2 + 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow \underline{\underline{x_2 = -2;\; x_3 = 2}}$$

Alle Nullstellen der Ableitung sind einfach. Daher liegen überall Extremstellen vor. Wegen der eingeschränkten Definitionsmenge gibt es auch an deren Rändern Extremstellen: $\underline{\underline{x_4 = -3;\; x_5 = 3}}$

2.1 Zunächst brauchen wir die Funktionsgleichung:

$$f(x) = a \cdot (x-2)(x+2)$$

(0/4) eingesetzt: $4 = a \cdot (0-2)(0+2) \Rightarrow 4 = -4a \Rightarrow a = -1$

$$\Rightarrow f(x) = -(x-2)(x+2) = -(x^2-4) = -x^2+4$$

Wegen der Symmetrie berechnen wir zunächst die halbe Fläche:

$$\int_0^2 -x^2+4\,dx = \left[-\frac{x^3}{3}+4x\right]_0^2 = \left[-\frac{2^3}{3}+4\cdot 2\right] - 0 = -\frac{8}{3}+8 = \frac{24}{3}-\frac{8}{3} = \frac{16}{3}$$

$$\Rightarrow A = 2 \cdot \frac{16}{3} = \underline{\underline{\frac{32}{3}}}$$

2.2 Der gegebene Graph ist jetzt die Ableitung:

Monotonieverhalten

Die Ableitung verläuft oberhalb der x-Achse für $-2 < x < 2$. In diesem Bereich ist der Graph von F streng monoton steigend, für $x < -2$ und $x > 2$ streng monoton fallend.

Extremstellen

An der Stelle $x = -2$ ändert die Ableitung ihr Vorzeichen von $-$ nach +.
F hat an dieser Stelle daher einen TIP.

An der Stelle $x = 2$ ändert die Ableitung ihr Vorzeichen von $+$ nach $-$.
F hat an dieser Stelle daher einen HOP.

Wendestelle

An der Wendestelle ist die Steigung maximal bzw. minimal. Einziges Extremum der Ableitung ist (0/4). Daher hat der Graph von F bei $x = 0$ eine Wendestelle.

Außerdem ist die Ableitung für sehr große und sehr kleine x negativ.

Daher gilt: $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = \infty$; $\lim\limits_{x\to\infty} F(x) = -\infty$

3 $\left(e^x\right)^2 - 25 = 0 \quad \Rightarrow e^{2x} - 25 = 0 \quad \Rightarrow e^{2x} = 25 \quad \Rightarrow 2x = \ln 25 \quad \Rightarrow 2x = \ln 5^2$

$\Rightarrow 2x = 2\ln 5 \quad \Rightarrow \underline{\underline{x = \ln 5}}$

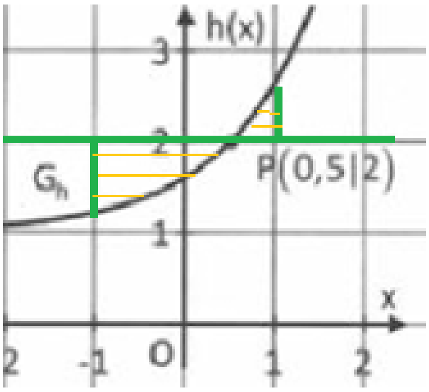
4.1 Die e-Funktion ist offensichtlich um 1 nach oben verschoben.

Also gilt: $y_0 = 1$

P(0,5/2) eingesetzt: $2 = e^{0,5+d} + 1 \quad \Rightarrow e^{0,5+d} = 1 \quad \Rightarrow 0,5 + d = \ln 1 \quad \Rightarrow 0,5 + d = 0$

$\Rightarrow \underline{\underline{d = -0,5}}$

4.2



Für $-1 \le x < 0,5$ ist die Gerade bei der „Wurstfläche" oben, das Integral ist daher positiv.

Für $0,5 < x \le 1$ ist die Gerade unten, das Integral ist daher negativ.

Da die linke Fläche größer ist, ist das gesamte Integral positiv.
Die Aussage ist wahr.

